1 y 2 Números reales. Operaciones. Ordenación

1. Clasifica los siguientes números decimales en racionales o irracionales.

a) 12,23232323232323...

b) 12,360360360360360...

c) 12,360360036000360000...

d) 12,135531135531135531...

e) 12,112123123412345123456...

2. Indica el conjunto numérico más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

a) $-\sqrt{9}$ b) $\frac{12}{3}$ c) 12,24242424... d) 1,122333444455555... e) $3{,}14 + \pi$

3. La siguiente tabla muestra aproximaciones por exceso y por defecto del número real $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Complétala.

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$	Error
Por defecto	1,414	1,732		
Por exceso	1,415	1,733		

4. Toma logaritmos en los dos miembros de las siguientes expresiones:

a) $A = xy^2z^4$ b) $B = \frac{2x^2 \cdot y^4}{z^6}$ c) $C = \sqrt[3]{\frac{2x^2 \cdot y^5}{3z^3}}$

5. Pasa a forma algebraica las siguientes expresiones:

a) $\log A = 2 \log 3 - 2 \log x + 3 \log y - \log z$

b) $\log B = \log (2x - 2y) + \log (x - 2y)$

6. Escribe en forma potencial las siguientes expresiones:

a) $4x^2 \cdot 3x^4$ b) $x^{-3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ c) $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ d) $\frac{3x + 1}{\sqrt[3]{3x + 1}}$ e) $\sqrt{\sqrt[3]{2x}}$

7. Escribe un número comprendido entre:

a) $\frac{2}{11}$ y $\frac{3}{11}$ b) 0,002341 y 0,002342

8. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

$$\frac{25}{8}, \frac{256}{81}, \frac{22}{7} \text{ y } \frac{377}{120}$$

9. Utilizando el teorema de Tales y el teorema de Pitágoras, representa en la recta real los siguientes números reales:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{20}$

10. Representa en la recta real los siguientes intervalos y semirrectas:

a) $(3, 5)$ b) $(4, 6]$ c) $(3, +\infty)$ d) $(-\infty, -2]$

11. Representa los siguientes conjuntos de números en la recta real:

a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| > 3$ d) $|x| \geq 3$

12. Una tienda cobra por el alquiler de una bicicleta 2 euros a la hora. Otra tienda cobra por el mismo alquiler 1,75 euros a la hora, pero a esta cantidad se le debe añadir 4 euros independientemente del tiempo que se contrate. ¿A partir de cuántas horas es más económica la segunda tienda?

SOLUCIONES

1. a) Racional por ser un número decimal periódico.

b) Racional por ser un número decimal periódico.

c) Irracional por ser un número decimal no periódico.

d) Racional por ser un número decimal periódico.

e) Irracional por ser un número decimal no periódico.

2. a) Números enteros.

b) Números naturales.

c) Números racionales.

d) Números reales.

e) Números reales.

3.

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	Error
Por defecto	1,414	1,732	3,146	0,002
Por exceso	1,415	1,733	3,148	

4. a) $\log A = \log x + 2\log y + 4\log z$

b) $\log B = \log 2 + 2\log x + 4\log y - 6\log z$

c) $\log C = \dfrac{\log 2 + 2\log x + 5\log y - \log 3 - 3\log z}{3}$

5. a) $A = \dfrac{3^2 \cdot y^3}{x^2 \cdot z}$

b) $B = (2x - 2y) \cdot (x - 2y)$

6. a) $4x^2 \cdot 3x^4 = 12 \cdot x^6$

b) $x^{-3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{-3} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{-3+\frac{2}{3}} = x^{-\frac{7}{3}}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{2x}} = \dfrac{2}{(2x)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{2^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}} = 2^{1-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

d) $\dfrac{3x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} = \dfrac{3x+1}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}} = (3x+1)^{1-\frac{1}{3}} =$

$= (3x+1)^{\frac{2}{3}}$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{2x}} = ((2x)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (2x)^{\frac{1}{6}}$

7. a) $\dfrac{2}{11} < \dfrac{\frac{2}{11}+\frac{3}{11}}{2} < \dfrac{3}{11} \Rightarrow \dfrac{2}{11} < \dfrac{5}{22} < \dfrac{3}{11}$

b) $0{,}002341 < 0{,}0023415 < 0{,}002342$

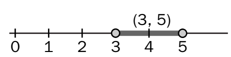
8. $\dfrac{25}{8} < \dfrac{377}{120} < \dfrac{22}{7} < \dfrac{256}{81}$

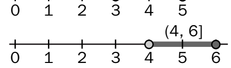
9. a)

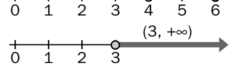
b)

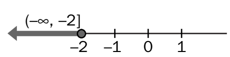
c)

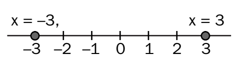
d)

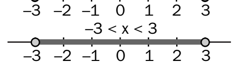
10. a) 

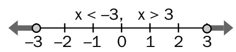
b) 

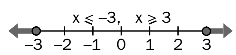
c) 

d) 

11. a) 

b) 

c) 

d) 

12. $2x > 1{,}75x + 4 \Rightarrow 0{,}25x > 4 \Rightarrow x > 16$

A partir de las 16 horas es más económica la segunda tienda.

1 y 2 Números reales. Operaciones. Ordenación

1. Se quiere calcular el radio de varias bolas de acero, para lo cual se van sumergiendo en un recipiente graduado y lleno de agua para obtener, de esta forma, sus respectivos volúmenes. Completa, redondeando a dos cifras decimales, la siguiente tabla, en la que vienen expresadas las medidas halladas:

Volumen (cm^3)	12,5	20,3	95	225
Radio (cm)				

2. Simplifica el valor de la siguiente expresión: $\sqrt[3]{\dfrac{15\sqrt{8} + 3\sqrt{128}}{\sqrt{32} - \sqrt{18}}}$

3. Llamamos metro a la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre. Con ayuda de esta definición, calcula el radio de la Tierra en el supuesto de que esta fuera una esfera perfecta.

4. El Ayuntamiento de Loma del Pastor, cuyo municipio cuenta con 600 habitantes de edad comprendida entre dieciséis y veinte años, realiza una encuesta sobre las actividades deportivas que interesan a dicho segmento de población. Sabiendo que el 81,818181... % contestó que no le interesaba el ciclismo y que el 14,583333... % contestó que le interesaba la natación, averigua el número de jóvenes que respondieron a la encuesta.

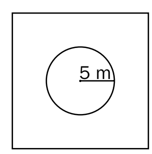
5. Escribe el número irracional $\sqrt{21 + 6\sqrt{12}}$ como un número del tipo $n + \sqrt{m}$, donde n y m son números enteros.

6. Demuestra que el número $\sqrt{20 + 2\sqrt{19}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{19}}$ es entero.

7. Encuentra los valores reales de x que verifican simultáneamente las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} 6(x+1) + \dfrac{23}{5} > 4x + \dfrac{68}{5} \\ \dfrac{3 + 8(x+1)}{2} < 2x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

8. Se quiere rodear de césped artificial una piscina de forma circular con 5 m de radio mediante un jardín de forma cuadrada, tal y como muestra la figura. Se sabe que el metro cuadrado de césped cuesta 5 euros. ¿Cuánto deberá medir el lado del cuadrado de manera que el coste no supere los 1 500 euros?



9. a) Partiendo de la desigualdad $(x - y)^2 > 0$, demuestra que si x e y son dos números positivos distintos, entonces $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} > 2$.

b) Demuestra que si a, b y c son números positivos distintos, entonces se verifica la siguiente desigualdad: $(a + b + c) \cdot \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) > 9$

10. Demuestra que al sustituir cualquier número natural n en la expresión $5^n - 1$ se obtiene como resultado un múltiplo de 4.

11. Demuestra que al sustituir cualquier número natural n en la expresión $3n^2 + n - 2$ se obtiene un número par.

SOLUCIONES

1. $V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}$

Por tanto:

Volumen (cm³)	12,5	20,3	95	225
Radio (cm)	1,44	1,69	2,83	3,77

2. $\sqrt[3]{\dfrac{15\sqrt{8} + 3\sqrt{128}}{\sqrt{32} - \sqrt{8}}} = \sqrt[3]{\dfrac{15 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 2^3\sqrt{2}}{2^2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{30\sqrt{2} + 24\sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\dfrac{54\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

3. $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cuadrante} = 10^7 \text{ m} \\ 4 \text{ cuadrantes} = 4 \cdot 10^7 \text{ m} \end{array}\right\}$

Longitud del meridiano $= 2 \cdot \pi \cdot r = 4 \cdot 10^7$

$r = \dfrac{4 \cdot 10^7}{2 \cdot \pi} \approx 6\,366\,000 \text{ m} = 6\,366 \text{ km}$

4. Si calculamos las fracciones correspondientes a los números racionales 81,818181... y 14,583333..., deducimos:

$\left.\begin{array}{l} 81{,}818181\ldots \,\%\text{ de } n \text{ es } \dfrac{900}{11} \cdot \dfrac{n}{100} = \dfrac{9n}{11} \\ 14{,}583333\ldots \,\%\text{ de } n \text{ es } \dfrac{174}{12} \cdot \dfrac{n}{100} = \dfrac{7n}{48} \end{array}\right\}$

n debe ser múltiplo de $11 \cdot 48 = 528$.

Como el número total de jóvenes es 600, deducimos que contestaron a la encuesta 528 de ellos.

5. $\sqrt{21 + 6\sqrt{12}} = \sqrt{9 + 12 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{12}} =$

$= \sqrt{(3 + \sqrt{12})^2} = 3 + \sqrt{12}$

6. $\left(\sqrt{20 + 2\sqrt{19}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{19}}\right)^2 =$

$= 20 + 2\sqrt{19} + 20 - 2\sqrt{19} -$

$- 2\sqrt{(20 + 2\sqrt{19}) \cdot (20 - 2\sqrt{19})} =$

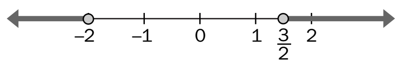
$= 40 - 2\sqrt{400 - 76} = 40 - 36 = 4$

Por tanto:

$\sqrt{20 + 2\sqrt{19}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{19}} = 2$

7. $\begin{cases} 30x + 30 + 23 > 20x + 68 \\ 3 + 8x + 8 < 4x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x > 15 \\ 4x < -8 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x < -2 \end{cases}$



8. Supongamos que el lado del cuadrado mide x metros.

$5 \cdot (x^2 - 25\pi) < 1\,500 \Rightarrow x < 19{,}45 \text{ m}$

9. a) $(x - y)^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 > 2xy \Rightarrow \dfrac{x^2 + y^2}{xy} > 2 \Rightarrow \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} > 2$

b) $(a + b + c) \cdot \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) =$

$= \dfrac{a}{a} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{c}{c} =$

$= 1 + 1 + 1 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} >$

$> 3 + 2 + 2 + 2 = 9$ aplicando el apartado a.

10. Aplicamos el principio de inducción completa:

1. Para $n = 1$ se verifica:
   $5^1 - 1 = 4$ es múltiplo de 4.
2. Supongamos la propiedad cierta para $n - 1$:
   $5^{n-1} - 1$ es múltiplo de 4.

   Debemos comprobarla para n:
   $5^n - 1 = 5 \cdot 5^{n-1} - 1 - 4 + 4 = 5(5^{n-1} - 1) + 4$

   Como los dos sumandos de la última expresión son múltiplos de 4, resulta que $5^n - 1$ es múltiplo de 4.

11. Aplicamos el principio de inducción completa:

1. Para $n = 1$ se verifica: $3 + 1 - 2 = 2$ es par.
2. Supongamos la propiedad cierta para $n - 1$:

   $3(n - 1)^2 + (n - 1) - 2$ es par.

   Debemos comprobarla para n. Para ello:

   Desarrollamos la expresión anterior y resulta:

   $3(n - 1)^2 + (n - 1) - 2 = 3n^2 - 5n$

   Por tanto:

   $3n^2 + n - 2 = 3n^2 - 5n + 5n + n - 2 =$

   $= (3n^2 - 5n) + 6n - 2$

   $3n^2 + n - 2 = (3n^2 - 5n) + 2(3n - 1)$

   Como los dos sumandos de la última expresión son múltiplos de 2, resulta que $3n^2 + n - 2$ es par.