15 Monotonía y curvatura

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$:

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Calcula los puntos en los que alcanza un máximo o un mínimo relativo.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$, se pide:

a) Sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

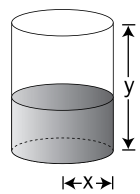
b) Sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) Los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión.

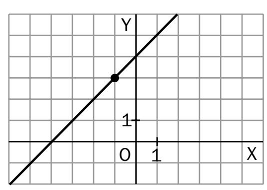
3. Estudia la curvatura de la función $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ determinando sus intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

4. La función $f(x) = a \cdot e^{2x} + b \cdot x^2 + c$ tiene un punto de inflexión en (0, 3) y la pendiente de la recta tangente en ese punto es igual al valor $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{2 \operatorname{sen} x - x}$. Calcula los valores de *a*, *b* y *c*.

5. ¿Cuáles deben ser las dimensiones (altura y radio de la base) de un depósito de agua cilíndrico de volumen máximo, si su superficie total, incluidas las dos tapas, es de 300 m^2?



6. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (−1, 3) y corta los ejes de coordenadas determinando un triángulo de área máxima.



7. Considera la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

a) ¿Qué valores deben tomar *b*, *c* y *d* para que la función tenga un punto de inflexión en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea $y = 2x - 3$?

b) Para esos valores, estudia el crecimiento y la curvatura de la función.

SOLUCIONES

1. Dominio: $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$; $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

se anula en $x = 0$. Signo de $f'(x)$:

$+ \quad -1 \quad + \quad 0 \quad - \quad 1 \quad -$

La función es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ y es decreciente en $(0, 1)$ y $(1, \infty)$

Máximo: $(0, -1)$

2. Dominio: $\mathbf{R}$

$$f'(x) = \frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4\cdot(2-x)\cdot(2+x)}{(x^2+4)^2}$$

Se anula en $x = -2$ y $x = 2$

$- \quad -2 \quad + \quad 2 \quad -$

La función es creciente en $(-2, 2)$ y es decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$.

Mínimo relativo: $(-2, -1)$. Máximo relativo: $(2, 1)$

$$f''(x) = \frac{8x^3-96x}{(x^2+4)^3} = \frac{8x\cdot(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$$

Se anula en $x = 0$, $x = -2\sqrt{3}$ y en $x = 2\sqrt{3}$

$- \quad -2\sqrt{3} \quad + \quad 0 \quad - \quad 2\sqrt{3} \quad +$

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, -2\sqrt{3})$ y en $(0, 2\sqrt{3})$ y es convexa en $(-2\sqrt{3}, 0)$ y en $(2\sqrt{3}, \infty)$.

Puntos de inflexión:

$\left(-2\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0, 0)$ y $\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$

$f''(x) = 2x\cdot(2x^2-3)\cdot e^{-x^2}$

La derivada segunda se anula en $x = 0$

y en $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Signo de $f''(x)$:

$- \quad -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \quad + \quad 0 \quad - \quad \dfrac{\sqrt{6}}{2} \quad +$

$f(x)$ es cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(0, \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

y convexa en $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, 0\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \infty\right)$

Puntos de inflexión: $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, -\dfrac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $(0, 0)$

y $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

4. $f'(x) = 2a\cdot e^{2x} + 2bx$ y $f''(x) = 4a\cdot e^{2x} + 2b$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2\cos x - 1} = 2 \Rightarrow f'(0) = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

Como $(0, 3)$ es punto de inflexión:

$f(0) = 3 \Rightarrow a + c = 3 \Rightarrow c = 2$

$f''(0) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \Rightarrow b = -2$

La función es: $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 2$

5. Superficie: $2\pi x^2 + 2\pi xy = 300 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{300-2\pi x^2}{2\pi x}$

Volumen: $C(x, y) = \pi x^2 y \Rightarrow V(x) = 150x - \pi x^3$

Se busca el máximo de $V(x)$ anulando la derivada primera, $V'(x) = 150 - 3\pi x^2$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{5\sqrt{2\pi}}{\pi}$. La solución negativa no tiene sentido. Como $V''\left(\dfrac{5\sqrt{2\pi}}{\pi}\right) < 0$, se alcanza el volumen máximo para $x = \dfrac{5\sqrt{2\pi}}{\pi} \approx 4$ m

$y = \dfrac{10\sqrt{2\pi}}{\pi} \approx 8$ m

6. La recta es de la forma $y - 3 = m(x+1)$

Los puntos de corte con los ejes son: $\left(-\dfrac{3+m}{m}, 0\right)$ y $(0, m+3)$. El área del triángulo depende de la pendiente m, $A(m) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{3+m}{m}\right)\cdot(m+3)$

La derivada $A'(m) = \dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{9}{m^2}\right)$ se anula en $m = \pm 3$. Como $A''(m) = -\dfrac{9}{m^3} \Rightarrow A''(3) < 0$, el área es máxima para $m = 3$.

La recta buscada es: $y - 3 = 3(x+1)$

7. $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6x + 2b$

a) $f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2b = 0 \Rightarrow b = -3$; la pendiente de la tangente es $m = 2$: $f'(1) = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3 + 2b + c = 2 \Rightarrow c = 5$; $f(1) = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 + b + c + d = -1 \Rightarrow d = -4$, la función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$.

b) Como $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 > 0$, la función es siempre creciente. Estudiando el signo de $f''(x) = 6x - 6$ vemos que la función es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, \infty)$, ya que el único punto de inflexión es $(1, -1)$.

14 Funciones derivables: propiedades locales y globales

1. Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \mathrm{L}(\operatorname{tg} x)$ en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Halla los puntos de la curva $f(x) = x^2 + 2$ en los que la tangente a esta pasa por el punto $P(0, 1)$. Escribe las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

3. Estudia para qué valores de a, b y c la recta que une los puntos $A(-1, 1)$ y $B(1, 3)$ es tangente en el punto B a la gráfica de la función $f(x) = a\mathrm{L}(1 + x^2) - bx + c$.

4. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 0)$ y es paralela a la tangente a la curva $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ en su punto de intersección con la recta $x = 2$.

5. Calcula el valor de m, n y k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^3 + mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[k, 1]$ y determina el valor $x = c$ que predice este teorema.

6. Calcula el valor de a, b y k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leqslant 1 \\ ax^2 + b(x - 1) + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, k]$ y determina el valor $x = c$ que predice este teorema.

7. Demuestra que para cualquier número real p, la ecuación $2x^5 + x + p = 0$ no tiene nunca dos soluciones reales.

8. Sin calcular la derivada de la función $f(x) = x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x + 3)$, estudia cuántas raíces reales tiene la ecuación $f'(x) = 0$ y determina los intervalos a los que pertenecen.

9. Escribe la fórmula de los incrementos finitos para cada una de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.

a) $f(x) = \cos x$ en $[\pi, \pi + h]$

b) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ en $[2, 2 + h]$

10. Calcula el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

SOLUCIONES

1. D $f(x) = \cos x + \dfrac{1 + \text{tg}^2 x}{\text{tg } x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1 + \text{tg}^2\dfrac{\pi}{4}}{\text{tg}\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2$

Además, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\dfrac{\pi}{4} + \text{L tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: el punto de tangencia es $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La ecuación de la tangente es $y - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\right) \cdot \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

2. Los puntos de tangencia son:
$A(a, f(a)) = A(a, a^2 + 2)$
Las ecuaciones de las tangentes son:
$y - 1 = mx$ con $m = f'(a) \Rightarrow m = 2a$
Como A pertenece a la tangente $a^2 + 2 - 1 = (2a) \cdot a$ y resolviendo la ecuación $a = \pm 1$. Los puntos de tangencia son $A_1(-1, 3)$ y $A_2(1, 3)$ y las tangentes t_1: $y - 3 = -(x + 1)$ y t_2: $y - 3 = (x - 1)$.

3. La gráfica pasa por B: $f(1) = 3 \Rightarrow a\text{L}2 - b + c = 3$ la recta que pasa por A y B tiene pendiente $m = 1$ y es tangente en B, $f'(1) = 1$; como

$f'(x) = \dfrac{2ax}{1 + x^2} - b \Rightarrow 1 = a - b$. Por tanto,
$a = 1$, $c = 3 + b - (1 + b)\,\text{L}2$ y b es un parámetro que se puede elegir de forma arbitraria.

4. La pendiente de la recta buscada es $f'(2)$:
$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} \Rightarrow f'(2) = -20$
Por lo tanto, la recta pedida es:
$y - 0 = -20(x - 1) \Rightarrow 20x + y - 20 = 0$

5. Para que sea continua en $x = 0$:
$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow n = 3$

Para que sea derivable en $x = 0$, $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 0$

Para que $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^3 + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
continua y derivable en $[k, 1]$, verifique las hipótesis del teorema de Rolle $f(1) = f(k) \Rightarrow f(k) = 4$.

Para $k < 0$: $3k^2 + 3 = 4 \Rightarrow k = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

D $f(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 3x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow c = 0$

6. Para que sea continua en $x = 1$:
$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow 3 = a + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -1$

Para que la función:
$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leqslant 1 \\ -x^2 + 5x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en $[-2, k]$ y verifique las hipótesis del teorema de Rolle: $f(-2) = f(k) = -6$; si $k > 1$; $-k^2 + 5k - 1 = -5 \Rightarrow k = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$

D $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -2x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f'(c) = 0 \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow c = \dfrac{5}{2}$

7. Por reducción al absurdo: sean x_1 y x_2 soluciones reales distintas de la ecuación $x_1 < x_2$.

La función $f(x) = 2x^5 + x + p$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[x_1, x_2]$ y, por tanto, existe c, $x_1 < c < x_2$ tal que $f'(c) = 0$; es decir, $10c^4 + 1 = 0 \Rightarrow 10c^4 = -1$, imposible si c es real.

Por tanto, la ecuación no puede tener dos soluciones reales.

8. $f(x)$ es continua y derivable en **R** y, además, $f(-3) = f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.

La función cumple las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos $[-3, -1]$, $[-1, 0]$ y $[0, 1]$ y, por tanto, $f'(x) = 0$ tiene al menos una solución en el interior de cada uno de ellos.

Como $f'(x)$ es de grado tres, tiene exactamente tres raíces, una en cada intervalo.

9. a) $\cos(\pi + h) - \cos\pi = -h\,\text{sen}\,c$ con $\pi < c < \pi + h$

b) $\text{sen}\,[2(2 + h)] - \text{sen}\,4 = 2h\cos 2c$ con $2 < c < 2 + h$

10. $\lim\limits_{x \to 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\dfrac{1}{x^2}} =$
$= \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$