16 Estudio y representación de funciones

1. a) Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ atendiendo a los siguientes puntos: dominio de definición, corte con los ejes, intervalos de monotonía e intervalos de curvatura. A partir de la gráfica anterior, establece razonadamente cómo serían las gráficas de las funciones:

i) $g(x) = x^2 - 2|x| - 3$

ii) $m(x) = -x^2 + 2x + 3$

iii) $n(x) = (x - 2)^2 - 2(x - 2) - 3$

b) Dibuja las gráficas de las tres funciones anteriores.

2. Representa la función $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ y estudia sus simetrías.

3. Dada la función $f(x) = \left|\dfrac{x^2}{x - 1}\right|$, se pide:

a) Representa la función.

b) Indica su dominio y la ecuación de sus asíntotas.

c) Indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$, se pide:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes.

b) Extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Asíntotas verticales y oblicuas.

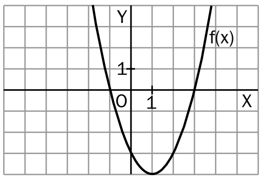
d) Representa la gráfica de la función.

5. Determina el valor del parámetro k para que la recta $y = 2x + 6$ sea una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x - k}$ y halla la ecuación de las restantes asíntotas de esta función.

6. Halla las asíntotas de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ y comprueba si en algún caso la asíntota corta la gráfica de la función, calculando el punto de corte.

SOLUCIONES

1. a) Dominio: $\mathbb{R}$. Puntos de corte con los ejes: $(0, -3)$, $(-1, 0)$, $(3, 0)$; $f'(x) = 2x - 2$ se anula en $x = 1$, la función decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, \infty)$; mínimo $(1, -4)$; como $f''(x) = 2 > 0$ la función es convexa.

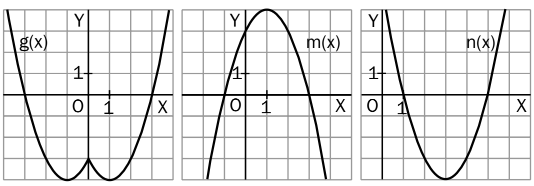


i) $g(x) = f(|x|)$ su gráfica coincide con la de $f(x)$ en los valores positivos y es simétrica respecto al eje OY.

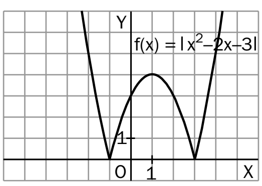
ii) $m(x) = -f(x)$ su gráfica es simétrica respecto al eje OX de la de $f(x)$.

iii) $n(x) = f(x - 2)$ es la función trasladada según el vector $\vec{u} = (2, 0)$.

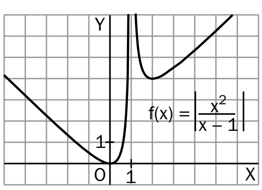
b)



2. Se representa la parábola $g(x) = x^2 - 2x - 3$ y como $f(x) = |g(x)|$, los trozos negativos se sustituyen por sus simétricos respecto al eje OX.
Como proviene de una parábola, es simétrica respecto al eje $x = 1$.



3. a) El estudio y la gráfica se obtienen a partir de la función $g(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ teniendo en cuenta que los trozos negativos de esta ($x < 1$) se sustituyen por sus simétricos respecto al eje OX.



b) Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$

- Asíntota vertical: $x = 1$
  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$
- Asíntotas oblicuas: $y = -x - 1$ si $x \longrightarrow -\infty$, $y = x + 1$ si $x \longrightarrow \infty$

c) $f(x)$ es creciente en $(0, 1) \cup (2, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$

4. a) Dominio $\mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con los ejes: $(-2, 0)$ y $(1, 0)$

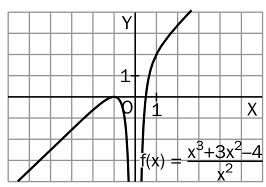
b) $f'(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^3}$ se anula en $x = -2$

Signo de $f'(x)$: $+$ $\quad -2 \quad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decrece en $(-2, 0)$. Tiene un máximo relativo en $(-2, 0)$

c)
- $x = 0$ es asíntota vertical:
  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
- $y = x + 3$ es asíntota oblicua:
  $$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3} = 1$$
  $$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4}{x^2} = 3$$

d)



5. Como $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ debe ser $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = 6$
$$\Rightarrow 6 = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2}{x - k} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2kx}{x - k} = 2k \Rightarrow$$
$\Rightarrow k = 3$

La función es $f(x) = \dfrac{2x^2}{x - 3}$ y tiene además una asíntota vertical en $x = 3$.

6. Dominio $\mathbb{R}$. No tiene asíntotas verticales.
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow \infty$

Punto de corte $(0, 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \infty$, no hay asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (x \cdot e^{-x}) = -\infty$, no hay asíntota oblicua cuando $x \longrightarrow -\infty$.

16 Estudios y representación de funciones

1. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x} - 1}$. Comprueba si en algún caso la asíntota corta a la gráfica de la función y, en ese caso, calcula el punto de corte.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$, se pide:

a) Hallar dominio y asíntotas.

b) El estudio de la continuidad y derivabilidad de la función.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

d) Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

e) La representación gráfica de la función.

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{2 + \cos x}$:

a) Estudia su signo en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y las simetrías que presenta su gráfica.

b) Determina sus máximos y mínimos relativos en el intervalo.

c) Determina sus puntos de inflexión en $[-\pi, \pi]$.

d) A partir del estudio realizado en los apartados anteriores, representa gráficamente la función en todo su dominio.

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-ax}}{1 + x}$, donde a es un número positivo:

a) Determina sus máximos y mínimos relativos.

b) Halla la ecuación de sus asíntotas.

c) Representa gráficamente la función para $a = 1$.

SOLUCIONES

1. Dominio $\mathbf{R} - \{0\}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{2x} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2e^{2x}} = \dfrac{1}{2}$

$f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{e^{2x} - 1} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{2e^{2x}} = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow \infty$, no hay punto de corte; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ no hay asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$.

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \longrightarrow -\infty$.

2. a) Dominio $\mathbf{R}$; $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{e^{1-x}} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{e^{1-x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{x}{e^{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

b) $f(x)$ es continua en $\mathbf{R}$ pero no derivable en $x = 0$ ni en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1 + x}{e^{1-x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1 + x}{e^{1-x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1 - x}{e^{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{x + 2}{e^{1-x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x + 2}{e^{1-x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x - 2}{e^{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

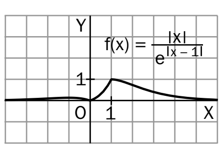
c) $f'(x)$ se anula en $x = -1$. Creciente: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; decreciente: $(-1, 0) \cup (1, \infty)$.

Máximos relativos: $\left(-1, \dfrac{1}{e^2}\right)$ y $(1, 1)$; mínimo relativo: $(0, 0)$.

d) Se anula en $x = -2$ y en $x = 2$.

- Cóncava: $(-2, 0) \cup (1, 2)$
- Convexa: $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$
- Puntos de inflexión: $\left(-2, \dfrac{2}{e^3}\right)$ y $\left(2, \dfrac{2}{e}\right)$

e)



3. a) Como $2 + \cos x$ es siempre positivo, el signo de $f(x)$ coincide con el de $\operatorname{sen} x$: $f(x) > 0$ en $(0, \pi)$ y $f(x) < 0$ en $(-\pi, 0)$.

La gráfica es simétrica con respecto al origen, ya que $f(x)$ es impar, luego basta hacer el estudio en $(0, \pi)$.

b) $f'(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$, $f'(x) = 0$ si $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$

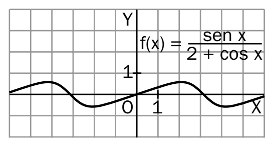
$f''(x) = \dfrac{2 \operatorname{sen} x(\cos x - 1)}{(2 + \cos x)^3}$ y $f''\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) < 0$ luego

$f(x)$ alcanza un máximo en $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y, por simetría, un mínimo en $\left(-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

c) $f''(x) = 0$ si $\operatorname{sen} x = 0$ o $\cos x - 1 = 0$

Puntos de inflexión $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$.

d)



4. a) $f'(x) = \dfrac{-e^{-ax}(ax + a + 1)}{(1 + x)^2} = \dfrac{-ae^{-ax}\left(x + \dfrac{a+1}{a}\right)}{(1 + x)^2}$

se anula si $x = -\dfrac{a + 1}{a}$; además,

$\begin{cases} x < -\dfrac{a + 1}{a} \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > -\dfrac{a + 1}{a} \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$; por tanto,

$f(x)$ alcanza un máximo en $x = -\dfrac{a + 1}{a}$

b) Dominio $\mathbf{R} - \{-1\}$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$,

$x = -1$ es una asíntota vertical.

$y = 0$ es asíntota horizontal si $x \longrightarrow \infty$

Cuando $x \longrightarrow -\infty$ hay rama parabólica, ya que:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-ax}}{(1 + x)} = \lim\limits_{x\to \infty} (-ae^{-ax}) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-ax}}{(1 + x)\,x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-ae^{-ax}}{(1 + 2x)} =$

$= \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{a^2 e^{-ax}}{2} = \infty$

c) Máximo: $(-2, -e^2)$, $f''(x) = \dfrac{e^{-x}(x^2 + 4x + 5)}{(1 + x)^3}$;

$f(x)$ es cóncava si $x < -1$ y convexa si $x > -1$.