CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS

2

Evaluación

sm

BACHILLERATO

Índice

Prueba inicial (Álgebra lineal)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Se consideran los polinomios $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 3x - 7$ y $D(x) = x^2 + 3x$. Halla otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ para que se verifique la igualdad $P(x) = D(x)C(x) + R(x)$ con grado$(R(x))$ < grado$(D(x))$.

2. Efectúa y simplifica el resultado todo lo posible.

a) $\left(\frac{1}{x} - x\right)\left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x+1} - 1\right)$ b) $\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} \cdot \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2 - 1}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $3(x - 1)(x + 2) = 3x - 6$ b) $\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{5}\right) = 0$

4. La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tiene sus coeficientes enteros, y sus raíces son:

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{7}\,i}{3}, \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{7}\,i}{3}$$

Calcula los coeficientes enteros de la ecuación, a, b y c, más pequeños posibles en valor absoluto.

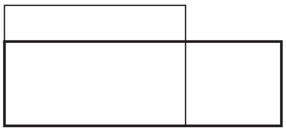
5. Opera y simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones algebraicas.

a) $3 \cdot (2x - 1)^2 - 3 \cdot (2x - 1) \cdot (2x + 1)$ b) $\frac{2x - 1}{3} + \frac{5x + 2}{12} - \frac{2x - 3}{4}$

6. Se sabe que una de las soluciones de la ecuación $x^2 - 8x + k = 0$ es $x_1 = 2$. Determina k y la otra solución.

7. El polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ es divisible entre $(x - 2)$, y al dividirlo entre $(x - 1)$ su resto es -1. Halla el valor numérico de $P(x)$ en $x = 3$.

8. Se tiene un rectángulo de 40 cm de perímetro. Si se reduce el lado menor del rectángulo un 25% y se amplía el lado mayor un 150%, se obtiene otro rectángulo que tiene 12 cm^2 más de área. ¿Cuál es su perímetro?



9. La solución del sistema de ecuaciones lineales siguiente es $S = (-2, 5)$. Halla los valores de a y b.

$$\begin{cases} 3x - 2by + 26 = 0 \\ ax + 7y - 23 = 0 \end{cases}$$

Representa e interpreta gráficamente el sistema.

10. Dos de las soluciones del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ son $S_1 = (1, 2, 3)$ y $S_2 = (0, 2, 4)$.

Calcula otra solución distinta y trata de expresar cómo serían las infinitas soluciones de dicho sistema.

11. Unos amigos consumen en un bar 3 refrescos y 5 cafés y por ello les cobran 13,50 €. Al día siguiente piden 4 refrescos y 2 cafés y les cobran 11 €. Un tercer día piden 5 refrescos y 3 cafés y al cobrarles 15 € reclaman la cuenta porque no están conformes. Plantea en términos de álgebra lineal el problema y justifica la reclamación que hacen.

Soluciones

1. Se efectúa la división entera de polinomios $P(x) : D(x)$ y resulta:

Cociente: $C(x) = 4x - 8$. Resto: $R(x) = 21x - 7$.

2. a) $\left(\frac{1}{x} - x\right)\left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x+1} - 1\right) = \frac{1 - x^2}{x} \cdot \frac{1 + x^2}{x} \cdot \frac{-x}{x+1} = \frac{x(x-1)(x+1)(1+x^2)}{x^2(x+1)} = \frac{(x-1)(1+x^2)}{x}$

b) $\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} \cdot \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x-2)(x-1)(x+3)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)(x+1)(x-2)^3} = 1$

3. a) $3(x-1)(x+2) = 3x - 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 3x - 6 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ solución doble.

b) $\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{4}{3} = 0 \\ 2x + \frac{1}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{10} \end{cases}$

4. La suma de las dos raíces es $S = \frac{4 + \sqrt{7}\,i}{3} + \frac{4 - \sqrt{7}\,i}{3} = \frac{8}{3}$ y el producto $P = \frac{4 + \sqrt{7}\,i}{3} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}\,i}{3} = \frac{16 + 7}{9} = \frac{23}{9}$.

La forma canónica de la ecuación $x^2 - mx + n = 0$ conduce a: $x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{23}{9} = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 24x + 23 = 0$

5. a) $3 \cdot (2x - 1)^2 - 3 \cdot (2x - 1) \cdot (2x + 1) = -12x + 6$ b) $\frac{2x - 1}{3} + \frac{5x + 2}{12} - \frac{2x - 3}{4} = \frac{7x + 7}{12}$

6. $x_1 + x_2 = 8 \Leftrightarrow 2 + x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 6$, $x_1x_2 = k \Leftrightarrow 2 \cdot 6 = k \Rightarrow k = 12$

7. $\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 6 + b = 0 \\ 1 + a + 3 + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = -14 \\ a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$

El polinomio es $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, y el valor numérico pedido es $P(3) = 27 - 27 + 9 - 2 = 7$.

8. Se denotan por x e y los lados del rectángulo original. Se plantea el sistema:

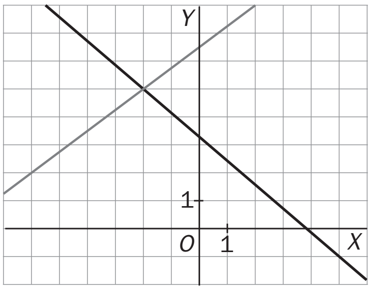
$$\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ \frac{3}{4}x\frac{3}{2}y = xy + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 9xy = 8xy + 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ x(20 - x) = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \text{ cm} \\ y = 12 \text{ cm} \end{cases}$$

Los lados del nuevo rectángulo son $x' = \frac{3}{4}x = 6$ cm e $y' = \frac{3}{2}y = 18$ cm, y su perímetro es $2 \cdot 6 + 2 \cdot 18 = 48$ cm.

9. La solución tiene que verificar todas las ecuaciones; por tanto

$$\begin{cases} 3 \cdot (-2) - 2b \cdot 5 + 26 = 0 \\ a \cdot (-2) + 7 \cdot 5 - 23 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10b = 20 \\ 2a = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 6 \end{cases}$$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas representa las coordenadas del punto de corte de las dos rectas que las ecuaciones determinan.



10. Al restar las dos últimas se obtiene $2y = 4 \Rightarrow y = 2$.

Sumando las dos últimas se obtiene $2x + 2z = 8 = x + z = 4$. Y como estas dos condiciones también las cumple la primera ecuación, todas las soluciones del sistema son de la forma $S = (\lambda, 2, 4 - \lambda)$ para todo $\lambda \in$ R. Otra solución podría ser $S = (5, 2, -1)$, si se da el valor 5 al parámetro λ.

11. Suponiendo que los dos primeros días hicieran bien las cuentas y llamando x al precio de un refresco e y al precio de un café, el sistema que refleja el problema es:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 13{,}5 \\ 4x + 2y = 11 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 20y = 54 \\ 12x + 6y = 33 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14y = 21 \\ 12x + 6y = 33 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5 \\ x = 2 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases}$$

La tercera ecuación no se verifica con los valores de las dos primeras. Luego el sistema es incompatible y, si las dos primeras cuentas están bien hechas, la tercera está necesariamente mal hecha, de ahí la reclamación.

1 Matrices

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Utilizar las matrices en la representación e interpretación de situaciones que conllevan datos estructurados en forma de tablas o grafos.	**1.** Una factoría fabrica dos modelos de coche, M y N, en tres terminaciones distintas: Berlina, Coupé y Familiar. Del modelo M produce mensualmente 40 unidades de Berlina, 20 Coupés y 7 en versión Familiar, y del modelo N, 30 Berlinas, 12 Coupés y 7 de la versión Familiar. La versión Berlina de cada modelo lleva 120 horas de mecánica y 45 de carrocería; la versión Coupé, 110 horas de mecánica y 60 de carrocería, y la versión Familiar, 95 y 55 horas de mecánica y carrocería respectivamente. a) Representa por medio de matrices la información anterior. b) Calcula una matriz que exprese las horas de mecánica y carrocería empleadas mensualmente para cada uno de los modelos.
B. Realizar sumas y productos de matrices entre sí y por números reales.	**2.** Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, calcula: a) AC b) C^tB c) $A^2 - B^2$
C. Realizar operaciones combinadas con matrices. Resolver ecuaciones matriciales sencillas.	**3.** Calcula una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
D. Entender el concepto de rango de una matriz y saber calcularlo por el método de Gauss.	**4.** Calcula el rango de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & -5 & -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
E. Calcular el rango de una matriz que depende de un parámetro.	**5.** Calcula, en función de m, el rango de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 4 & m \\ -1 & -m & 1-m \end{pmatrix}$
F. Determinar si un conjunto de vectores fila o columna son linealmente dependientes o independientes.	**6.** Dados los vectores de $\mathbf{R}^3$: $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 1, 4)$ y $v_3 = (1, 3, 2)$, se pide: a) ¿Cuántos hay linealmente independientes entre ellos? ¿Por qué? b) ¿El vector $v_4 = (2, 1, 3)$ depende linealmente de $\{v_1, v_2, v_3\}$? ¿Por qué?
G. Determinar si una matriz cuadrada es o no invertible mediante el cálculo de su rango.	**7.** Razona si las siguientes matrices son invertibles y, en caso afirmativo, halla sus inversas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
H. Calcular la matriz inversa de una matriz dada a partir de la definición o por el método de Gauss-Jordan.	
I. Calcular el transformado de un punto por uno o varios movimientos.	**8.** Halla el transformado del punto $P(2, 2)$ por los siguientes movimientos consecutivos: a) Un giro de 270° y centro el origen. b) A continuación, una traslación de vector guía $(1, -1)$. c) Por último, una simetría respecto del origen.

Soluciones

1. a) $\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B & C & F \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 40 & 20 & 7 \\ 30 & 12 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Me & Ca \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ C \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 120 & 45 \\ 110 & 60 \\ 95 & 55 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{pmatrix} 40 & 20 & 7 \\ 30 & 12 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 120 & 45 \\ 110 & 60 \\ 95 & 55 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Me & Ca \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 7665 & 3385 \\ 5585 & 2455 \end{pmatrix} \end{array}$

2. a) $AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

b) $C^tB = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

c) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

$XA^2 + BA = A^2 \Rightarrow XI_3 + BA = I_3 \Rightarrow X = I_3 - BA$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & -5 & -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 + 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -9 & -3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{F_3 \leftrightarrow F_4 \\ F_3 \to F_3 + F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 4 & m \\ -1 & -m & 1-m \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ m & 4 & 0 \\ -1 & -m & 2-m \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ m & 4 & 0 \\ 0 & 2-m & 2-m \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_1 \to 2F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ m & 4 & 0 \\ 0 & 2-m & 2-m \end{pmatrix}$

Si $m = 2$, rg$(A) = 1$, ya que en ese caso los elementos de la primera y de la tercera fila son cero.

Si $m \neq 2$, rg(A) $= 3$, ya que en ese caso la matriz es triangular y tiene todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero.

6. a) El rango de los vectores $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 1, 4)$ y $v_3 = (1, 3, 2)$ es igual al rango de la matriz A:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to 2F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

El rango de dicha matriz es 2, ya que la 2.ª y 3.ª filas son proporcionales y la primera y segunda no lo son. Luego hay dos vectores linealmente independientes entre ellos.

b) Para determinar si $v_4 = (2, 1, 3)$ depende linealmente de $\{v_1, v_2, v_3\}$, basta con comprobar si el rango de $\{v_1, v_2, v_4\}$ es 2. Para ello se estudia el rango de la matriz A'.

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Luego el rango de esa matriz es 3, ya que es triangular con todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero. Por tanto, v_4 no depende linealmente de v_1, v_2 y v_3.

7. Para determinar si A y B son invertibles, se calculan sus rangos.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{F_2 \leftrightarrow F_3 \\ C_2 \to C_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es una matriz triangular con elementos no nulos en la diagonal, luego rg$(A) = 3$ y la matriz A es invertible. Se calcula su inversa por el método de Gauss-Jordan:

$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 - 2F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_3 \to -F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

En la matriz B se observa que $F_1 = -F_2 + 2F_3$. Por tanto, las filas no son linealmente independientes, luego la matriz no es invertible.

8. a) $(2 \quad 2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \quad -2)$

b) $(2 \quad -2) + (1 \quad -1) = (3 \quad -3)$

c) $(3 \quad -3)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-3 \quad 3)$

2 Determinantes

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Calcular determinantes de orden 2.	**1.** Calcula los siguientes determinantes: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \log(4) & \log(4) \\ \log(2) & \log(20) \end{vmatrix}$
B. Calcular, mediante la regla de Sarrus, determinantes de orden 3.	**2.** Calcula los siguientes determinantes: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$
C. Utilizar las propiedades de los determinantes en el cálculo de determinantes de orden mayor o igual a 3.	**3.** a) Calcula, aplicando las propiedades de los determinantes: $\begin{vmatrix} ab & 2ac & 3a^2 \\ 2b^2 & bc & ab \\ 2bc & c^2 & 2ac \end{vmatrix}$ b) Demuestra la igualdad: $\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$
D. Calcular el rango de una matriz mediante el uso de determinantes.	**4.** Calcula el rango de las siguientes matrices: a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 7 & 15 \end{pmatrix}$
E. Calcular el rango de una matriz que depende de un parámetro.	**5.** a) Calcula, en función de x, el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$ b) Calcula, en función de x, el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{pmatrix}$
F. Comprobar mediante determinantes si una matriz cuadrada es invertible.	**6.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$: a) Halla los valores de a para los que la matriz A tiene inversa. b) Para $a = 2$, calcula la inversa de A.
G. Utilizar los determinantes para calcular la inversa de una matriz cuadrada regular.	**7.** Determina los valores de n para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ n & n+1 & n \\ 2n & 2n+1 & 2n+1 \end{pmatrix}$ es regular y calcula su inversa, en caso de que exista, para $n = 0$.
G. Resolver ecuaciones matriciales en cuyo planteamiento intervienen matrices regulares de orden menor o igual a 3.	**8.** Resuelve la ecuación matricial $AX - B + C = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **9.** Resuelve el sistema de ecuaciones matriciales $\begin{cases} 3X + Y = A \\ X - 2Y = 2B \end{cases}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluciones

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\begin{vmatrix} \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{vmatrix} = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\text{sen}(\beta) =$$
$$= \text{sen}(\alpha - \beta)$$

$$\begin{vmatrix} \log(4) & \log(4) \\ \log(2) & \log(20) \end{vmatrix} = \log(4)\cdot\log(20) - \log(4)\cdot\log(2) =$$
$$= \log\frac{4\cdot 20}{4\cdot 2} = \log(10) = 1$$

2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 - 2 = -6$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - (cab + bca + abc) =$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

3. a) $\begin{vmatrix} ab & 2ac & 3a^2 \\ 2b^2 & bc & ab \\ 2bc & c^2 & 2ac \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} b & 2c & 3a \\ 2b & c & a \\ 2b & c & 2a \end{vmatrix} =$

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3a^2b^2c^2$$

b) $\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} \overset{\substack{a\cdot F_1 \\ b\cdot F_2}}{\underset{c\cdot F_3}{=}} \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & abc \\ b^3 & b^2 & bca \\ c^3 & c^2 & cab \end{vmatrix} =$

$$= \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

4. a) $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \geqslant 2$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 8 - (-1 - 72) =$$
$$= 53 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \geqslant 2$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -21 \Rightarrow \text{rg}(A) \geqslant 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

5. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}}{\underset{F_4+F_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} =$

$$= (x+1)^3$$

b) Si $x \neq -1$, $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 4$.

Si $x = -1$, $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

6. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3$

a) Si $a = 1$ o $a = 3$, $|A| = 0$; luego A no es regular; en caso contrario sí lo es, y, por tanto, tiene inversa.

b) Si $a = 2$, $|A| = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ n & n+1 & n \\ 2n & 2n+1 & 2n+1 \end{vmatrix} = 3n + 1$

Si $n \neq -\dfrac{1}{3}$, $|A| \neq 0 \;\Rightarrow$ la matriz es regular.

Si $n = 0$, $|A| = 1$, y se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. $AX - B + C = 0 \Rightarrow AX = B - C \Rightarrow X = A^{-1}(B - C)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 14 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 5 & 8 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{13}{7} \\ 4 & 1 & \frac{23}{7} \end{pmatrix}$$

9. $\begin{cases} 3X + Y = A \\ X - 2Y = 2B \end{cases} \overset{2E_1+E_2}{\underset{E_1-3E_2}{\Rightarrow}} \begin{cases} 7X = 2A + 2B \\ 7Y = A - 6B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{7}(A + B) \\ Y = \frac{1}{7}(A - 6B) \end{cases}$

$$X = \frac{2}{7}\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{17}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

3 Sistemas de ecuaciones lineales

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

1. Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 5y + 3z = 14 \\ 4x - y - 4z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 2z - t = 1 \\ 2x + 3y - z + t = 5 \\ x - 6y + 7z - 4t = -2 \end{cases}$

B. Expresar matricialmente un sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, resolverlo utilizando la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

2. Expresa matricialmente el siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo, si es posible, por el método de la matriz inversa:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ 3x + 4y + z = 2 \\ x + 3y + z = -5 \end{cases}$$

C. Resolver, mediante la regla de Cramer, sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas.

3. Resuelve por el método de Cramer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 8 \\ -x + 2y + z = 14 \end{cases}$$

D. Determinar, tanto por Gauss como aplicando el teorema de Rouché, la compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales, y resolverlos en el caso de ser compatibles.

4. Sabiendo que el sistema de ecuaciones representado por la siguiente ecuación matricial tiene un número infinito de soluciones, halla el valor de k.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

E. Resolver sistemas homogéneos.

5. Halla todos los valores de k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones diferentes de (0, 0, 0) y calcula el conjunto de soluciones.

$$\begin{cases} 2x - 2y + kz = 0 \\ x + z = 0 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$$

F. Determinar la posición relativa de dos rectas en el plano.

6. Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} r\colon x - 2y = 7 \\ r'\colon 2x - y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} s\colon -x + y = 1 \\ s'\colon -x + y = -1 \end{cases}$

G. Discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro.

7. Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + (1 + a)y + z = 2a \\ x + y + (1 + a)z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 + a)x + (a - 1)y = a \\ ax + (a + 1)y = a - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

H. Plantear y resolver problemas que den lugar a sistemas de ecuaciones lineales.

8. Una empresa dispone de 27 200 € para subvencionar una semana de estancia en uno de los tres balnearios *A*, *B* y *C* a 100 de sus empleados. Tras analizar el número de solicitudes para cada uno de los balnearios, se ha decidido subvencionar con 400 € a cada uno de los que acudan al *A*, con 160 € a los que vayan al *B* y con 200 € a los que soliciten el *C*. Si la cantidad total asignada para los que van al balneario *A* es cinco veces mayor que la asignada para el *B*, ¿cuántos empleados van a cada balneario?

Soluciones

1. a) $$\begin{cases}2x+3y+z=11\\x+5y+3z=14\\4x-y-4z=3\end{cases}\xrightarrow[E_3\to E_3-4E_1]{E_1\leftrightarrow E_2,\ E_2\to E_2-2E_1}\begin{cases}x+5y+3z=14\\-7y-5z=-17\\-21y-16z=-53\end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_3\to E_3-3E_1}\begin{cases}x+5y+3z=14\\-7y-5z=-17\\-z=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\\z=2\end{cases}$$

b) $$\begin{cases}x-y+2z-t=1\\2x+3y-z+t=5\\x-6y+7z-4t=-2\end{cases}\xrightarrow[E_3\to E_1-E_3]{E_2\to E_2-2E_1}\begin{cases}x-y+2z-t=1\\5y-5z+3t=3\\5y-5z+3t=3\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}x=1+y-2z+t\\y=\dfrac{3+5z-3t}{5}\end{cases}\to\begin{cases}x=\dfrac{8-5\lambda+2\mu}{5}\\y=\dfrac{3+5\lambda-3\mu}{5}\\z=\lambda\\t=\mu\end{cases}$$

2. $$\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&4&1\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&4&1\\1&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2\\2\\-5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&\frac{4}{5}&-1\\\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-7\\9\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\y=-7\\z=9\end{cases}$$

3. $$\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\-1&2&1\end{vmatrix}=7,\quad x=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}3&-1&1\\8&1&1\\14&2&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$y=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}1&3&1\\2&8&1\\-1&14&1\end{vmatrix}=3,\quad z=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}1&-1&3\\2&1&8\\-1&2&14\end{vmatrix}=7$$

4. Para que el sistema sea compatible indeterminado (infinitas soluciones), es necesario que el rango de la matriz ampliada sea 2, y para ello se necesita que:

$$\begin{vmatrix}2&-1&7\\1&2&1\\2&1&k\end{vmatrix}=0\Rightarrow 5k-25=0\Rightarrow k=5$$

Por tanto, $k=5$.

5. Para que el sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial, debe ser compatible indeterminado, y para ello se necesita que $\text{rg}(A)<3$, es decir, $|A|=0$.

$$\begin{vmatrix}2&-2&k\\1&0&1\\k&1&1\end{vmatrix}=-k=0\Rightarrow k=0$$

Si $k=0$, el sistema es compatible indeterminado y, por tanto, tiene infinitas soluciones, que son:

$$\begin{cases}2x-2y=0\\x+z=0\\y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\x=-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\lambda\\x=-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$$

6. Se calculan los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada:

a) $\begin{vmatrix}1&-2\\2&-1\end{vmatrix}=3\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2$. El sistema es compatible determinado y las rectas son secantes.

b) $\begin{vmatrix}-1&1\\-1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A)=1$

$\begin{vmatrix}-1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$. El sistema es incompatible y las rectas son paralelas.

7. a) $$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+a&1\\1&1&1+a\end{vmatrix}=a^2$$

Si $a\neq 0$, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=$ n.º de incógnitas. Es un SCD con solución $x=a$, $y=1$, $z=-1$.

Si $a=0$, es un SCI con las siguientes soluciones:

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x+y+z=0\\x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\lambda-\mu\\y=\lambda\\z=\mu\end{cases}$$

b) $$\begin{vmatrix}1+a&a-1\\a&a+1\end{vmatrix}=3a+1$$

Si $a\neq-\frac{1}{3}$, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=$ n.º de incógnitas. Es un SCD con solución $x=\dfrac{3a-1}{3a+1}$, $y=\dfrac{-1}{3a+1}$.

Si $a=-\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y=-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=\frac{-4}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-4y=-1\\-x+2y=-4\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}2&-4\\-1&2\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}2&-1\\-1&-4\end{vmatrix}=-9\neq 0$$

El sistema es incompatible; no tiene solución.

c) $$\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}=7\neq 0,\ \begin{vmatrix}3&-1&a\\1&2&4\\1&-1&1\end{vmatrix}=-3a+15$$

Si $a=5$, $\text{rg}(A)=2=\text{rg}(A^*)=$ n.º incógnitas. Es un SCD con solución $x=2$, $y=1$.

Si $a\neq 5$, $\text{rg}(A)=2\neq\text{rg}(A^*)=3$. Es un sistema incompatible; no tiene solución.

8. El enunciado da lugar al siguiente sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, donde x, y, z son el número de empleados que van a cada uno de los balnearios A, B y C, respectivamente.

$$\begin{cases}x+y+z=100\\400x+160y+200z=27\,200\Rightarrow\\400x=5\cdot 160y\end{cases}$$

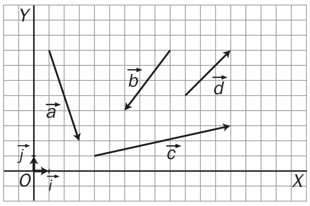
$$\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=100\\10x+4y+5z=680\Rightarrow\\x-2y=0\end{cases}\begin{cases}x=40\\y=20\\z=40\end{cases}$$

Prueba inicial (Geometría)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Tomando $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ como base de V_2, que es una base ortonormal, indica las coordenadas de los vectores representados en la figura y calcula sus módulos.



2. Se consideran $\vec{u} = (3, -1)$, $\vec{v} = (-4, 2)$ y $\vec{w} = (0, -4)$, vectores libres de V_2. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ b) $\left(3\vec{w}\right) \cdot \left(\vec{v} - 2\vec{u}\right)$ c) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{u}$

3. ¿Cuál es el vector director de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-1, -1)$? Escribe las ecuaciones paramétricas, la general y la explícita de la recta, y determina su pendiente y su ordenada en el origen.

4. La ecuación en forma paramétrica $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases}$ corresponde a una cónica. Elimina el parámetro t (para ello ten en cuenta la propiedad fundamental de trigonometría) y obtén la ecuación implícita para identificar la cónica. Represéntala gráficamente e indica sus elementos característicos.

5. Las rectas $r\colon x + 3y - 2 = 0$ y $s\colon 2x + 7y - 3 = 0$ determinan un ángulo.

a) Halla el vértice de dicho ángulo.

b) Indica los vectores directores de las dos rectas.

c) Calcula el seno y el coseno del ángulo que forman.

6. Justifica que el punto $P(-3, 5)$ pertenece a la bisectriz del ángulo determinado por las rectas $r\colon 4x + 3y = 6$ y $s\colon 3x + 4y - 8 = 0$.

7. Calcula la ecuación general de la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos de coordenadas $A(-3, 6)$ y $B(5, 10)$.

8. Determina razonadamente cuáles de los puntos $A(11, -4)$, $B(-10, 2)$, $C(2, 6)$ son interiores a la elipse de ecuación $25x^2 + 169y^2 - 4225 = 0$.

9. Identifica y representa el conjunto de puntos del plano $X(3 - 2\lambda, 1 + \lambda)$ con $\lambda \in [-3, 5]$.

10. Las rectas de ecuación $3x - 8y + 23 = 0$, $7x - y - 17 = 0$, $4x + 7y + 13 = 0$ definen un triángulo.

Determina:

a) Las coordenadas de sus vértices.

b) La longitud de sus lados.

c) Su área.

d) Las coordenadas del baricentro.

11. Representa el lugar geométrico de los puntos del plano $X(1 - t, 4 + t^2)$.

Hay dos puntos de dicho lugar geométrico cuya segunda coordenada es 29; ¿cuál es su primera coordenada?

12. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $A(2, -5)$ es el triple de la distancia al punto $B(2, 3)$. Identifica el lugar geométrico hallado.

Soluciones

1. $\vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} = (2, -6)$, $|\vec{a}| = +\sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\vec{b} = (-3, -4)$, $|\vec{b}| = \sqrt{25} = 5$, $\vec{c} = (9, 2)$, $|\vec{c}| = \sqrt{85}$, $\vec{d} = (3, 3)$, $|\vec{d}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

2. a) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = 2(3, -1) - 3(-4, 2) + (0, -4) = (6, -2) + (12, -6) + (0, -4) = (18, -12)$

b) $\left(3\vec{w}\right) \cdot \left(\vec{v} - 2\vec{u}\right) = (0, -12) \cdot (-10, 4) = -48$ c) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{u} = (-14) + (-8) + 4 = -18$

3. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-1, -1) - (2, -3) = (-3, 2)$. La ecuación de la recta en forma paramétrica es $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases}$.

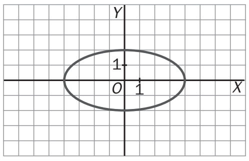
En forma general: $\dfrac{x - 2}{-3} = \dfrac{y + 3}{2} \Leftrightarrow 2x + 3y + 5 = 0$

La ecuación explícita es $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{3}$. Por tanto, la pendiente es $m = -\dfrac{2}{3}$ y la ordenada en el origen es $n = -\dfrac{5}{3}$.

4. Se despejan sen$t$ y cos$t$: $\cos t = \dfrac{x}{4}$, $\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{2}$. Como $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, se obtiene:

$\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Se trata de una elipse de ejes $2a = 8$, $2b = 4$,

y como $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$, los focos son $F(\sqrt{12}, 0)$, $F'(-\sqrt{12}, 0)$.



5. a) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 7y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow V(5, -1)$

b) $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (-7, 2)$

c) $\cos\alpha = \left|\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right| = \left|\dfrac{21 + 2}{\sqrt{10}\sqrt{53}}\right| = \dfrac{23}{\sqrt{530}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{529}{530}} = \dfrac{1}{\sqrt{530}}$

6. $d(P,r) = \dfrac{|4 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{3}{5}$, $d(P,s) = \dfrac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot 5 - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{3}{5}$. Como la distancia a las dos rectas es la misma, se puede asegurar que P pertenece a la bisectriz.

7. $d(X, A) = d(X, B) \Rightarrow \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 6)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 10)^2} \Rightarrow$

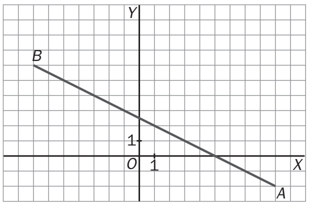
$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 20y + 100 \Rightarrow 16x + 8y - 80 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 10 = 0$

8. Si la ecuación de la elipse es $f(x, y) = 0$, los puntos interiores verifican que $f(x, y) < 0$, y los exteriores, $f(x, y) > 0$.
Con el punto $A(11, -4)$ resulta $25 \cdot (11)^2 + 169 \cdot (-4)^2 - 4225 = 1504 > 0$. Es exterior.
Con el punto $B(-10, 4)$ resulta $25 \cdot (-10)^2 + 169 \cdot (2)^2 - 4225 = -1049 < 0$. Es interior.
Con el punto $C(2, 6)$ resulta $25 \cdot (2)^2 + 169 \cdot (6)^2 - 4225 = 1959 > 0$. Es exterior.

9. Las ecuaciones paramétricas corresponden a un segmento de la recta

$r\colon \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ cuyos extremos se obtienen para $\lambda = -3 \Rightarrow A(9, -2)$ y para

$\lambda = 5 \Rightarrow B(-7, 6)$.

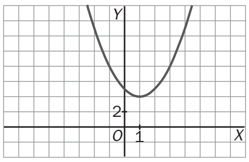


10. a) Se resuelven los sistemas tomando las ecuaciones de dos en dos: $A(2, -3)$, $B(3, 4)$, $C(-5, 1)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-7)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$

c) $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}| = \dfrac{1}{2}|(1, 7) \cdot (4, 7)| = \dfrac{1}{2}|4 + 49| = \dfrac{53}{2}$ u^2 d) Baricentro: $G\left(\dfrac{2 + 3 - 5}{3}, \dfrac{-3 + 4 + 1}{3}\right) = \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

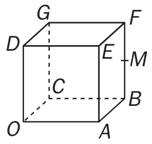
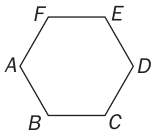
11. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 + t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - x \\ y = 4 + (1 - x)^2 = x^2 - 2x + 5 \end{cases}$. Para $y = 29$, $t = \pm 5 \Rightarrow x_1 = -4$, $x_2 = 6$.



12. $d(X, A) = 3d(X, B) \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 5)^2} = 3\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$

Es una circunferencia de centro $C(2, 4)$ y radio $r = 3$.

4 Vectores en el espacio

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Expresar un vector como combinación lineal de otros vectores dados.	**1.** En el cubo de la figura, M es el punto medio de $\overrightarrow{BF}$. Expresa los vectores $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{FO}$ y $\overrightarrow{DM}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ y $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$.  **2.** El vector $\vec{a}=(-2, -11, 1)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{b}=(2, -3, 5)$ y $\vec{c}=(4, 1, k)$. ¿Cuál es el valor de k?
B. Determinar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores.	**3.** Sabiendo que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, justifica que los vectores $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{w}$ y $\vec{w}-\vec{u}$ son linealmente dependientes y que los vectores $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{w}$ y $\vec{w}+\vec{u}$ son linealmente independientes. **4.** ¿Para qué valores del parámetro k los vectores $(1, k, 1)$, $(k, 1, 1)$ y $(1, 1, k)$ son linealmente dependientes?
C. Multiplicar escalarmente dos vectores tanto en la forma geométrica como en la analítica.	**5.** El lado del hexágono regular de la figura mide $\sqrt{3}$. Calcula los productos escalares $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{CF}$.  **6.** Si $\vec{x}\cdot\vec{x}=2$, $\vec{x}\cdot\vec{y}=-1$ y $\vec{y}\cdot\vec{y}=3$, y se tienen los vectores $\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}$, $\vec{b}=3\vec{x}-\vec{y}$, calcula: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}$, $\lvert\vec{b}\rvert$ y el coseno del ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
D. Determinar condiciones de ortogonalidad de dos vectores dependientes de un parámetro.	**7.** Halla dos vectores ortogonales a $\vec{x}=(-1, -2, 4)$ y a $\vec{y}=(1, 1, -2)$ de módulo $\sqrt{20}$. **8.** Se consideran los vectores $\vec{u}=(-2k, k, 5)$ y $\vec{v}=(1, 1, -1)$. Calcula el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{u}+2\vec{v}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.
E. Saber hallar el ángulo de dos vectores y determinar vectores ortogonales a uno dado.	**9.** Halla tres vectores unitarios, ortogonales al vector $\vec{a}=(-3, 5, 1)$, de modo que los tres tengan distinta dirección. Comprueba que son linealmente dependientes. **10.** Dados los vectores $\vec{a}=(-3, 5, 1)$, $\vec{b}=(2, -3, 5)$ y $\vec{c}=(4, 1, 1)$, calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de vectores: $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $\vec{a}$ y $\vec{c}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{c}-\vec{a}$
F. Calcular correctamente productos vectoriales y productos mixtos con unos vectores conocidos.	**11.** Dados los vectores $\vec{x}=(-4, 3, 0)$, $\vec{y}=(1, -3, 3)$, $\vec{z}=(5, -2, -1)$, halla: a) $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}$ b) $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})$ c) $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ d) $\lvert(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}\rvert$ e) $\lvert\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})\rvert$ **12.** Demuestra que $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\times(-2\vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v}\in V^3$. **13.** El producto mixto de los vectores $\vec{x}=(-1, 0, 3)$, $\vec{y}=(-2, -3, 1)$, y $\vec{z}=(k, 2, -1)$ es 2009. ¿Cuál es el valor de k?
G. Aplicar el producto vectorial para determinar una dirección ortogonal al plano vectorial V^2 determinado por dos vectores.	**14.** Con los vectores $\vec{u}=(1, 1, -2)$ y $\vec{v}=(2, -1, 0)$ se determina un espacio vectorial de dimensión 2 (plano vectorial V^2). Calcula un vector $\vec{w}$ que sea base de un espacio vectorial de dimensión 1 (recta vectorial V^1) de manera que los espacios V^2 y V^1 sean ortogonales. Demuestra que el vector $\vec{w}$ hallado es ortogonal a todos los vectores $\vec{x}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$, $(\lambda, \mu\in R)$. **15.** Sean $\vec{u}=(-2, 2, 1)$, $\vec{v}=(1, -4, 3)$, y $\vec{w}=(10, 7, 6)$. V^2 es el espacio vectorial de base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. V^1 es el espacio vectorial de base $\{\vec{w}\}$. Comprueba que todos los vectores de V^2 son ortogonales a los de V^1. Demuestra que los espacios vectoriales $V^2=\{\vec{x}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\}$ y $V^1=\{\vec{y}=\lambda\vec{w}\}$ son ortogonales.

Soluciones

1. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}=\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{a}=2\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BO}=-\vec{d}-\vec{b}$

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}=\vec{b}+\frac{1}{2}(-\vec{d})=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{d}$

2. $x\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\1\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-11\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+4y=-2\\-3x+y=-11\\5x+ky=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\\k=7\end{cases}$

3. a) $1(\vec{u}-\vec{v})+1(\vec{v}-\vec{w})+1(\vec{w}-\vec{u})=\vec{0}$, luego los vectores son linealmente dependientes.

b) Si $\alpha(\vec{u}-\vec{v})+\beta(\vec{v}-\vec{w})+\gamma(\vec{w}+\vec{u})=\vec{0}\Rightarrow$

$(\alpha+\gamma)\vec{u}+(\beta-\alpha)\vec{v}+(\gamma-\beta)\vec{w}=\vec{0}$. Como $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, se tiene que

$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\\beta-\alpha=0\\\gamma-\beta=0\end{cases}$, cuya única solución es la trivial, $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$; luego los tres vectores pedidos son linealmente independientes.

4. $\begin{vmatrix}1&k&1\\k&1&1\\1&1&k\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 3k-k^3-2=0\Leftrightarrow-(k-1)^2(k+2)=0$

Se anula si $k=1$ o $k=-2$. Para estos valores de k, los vectores son linealmente dependientes.

5. La longitud de la diagonal AC es igual al doble de la apotema, es decir, $2\cdot\frac{3}{2}=3$ y la longitud de la diagonal EB es el doble del lado, $2\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\alpha=\sqrt{3}\cdot3\cdot\cos30^\circ=\frac{9}{2}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos120^\circ=-\frac{3}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{3}\cdot3\cdot\cos90^\circ=0$

$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{CF}=2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\cos120^\circ=-6$

6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{x}+2\vec{y})\cdot(3\vec{x}-\vec{y})=3(\vec{x}\cdot\vec{x})+5(\vec{x}\cdot\vec{y})-2(\vec{y}\cdot\vec{y})=$

$=3\cdot2+5\cdot(-1)-2\cdot3=-5$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=(\vec{x}+2\vec{y})\cdot(\vec{x}+2\vec{y})=(\vec{x}\cdot\vec{x})+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+4(\vec{y}\cdot\vec{y})=$

$=2+4\cdot(-1)+4\cdot3=10$

$\vec{b}\cdot\vec{b}=(3\vec{x}-\vec{y})\cdot(3\vec{x}-\vec{y})=9(\vec{x}\cdot\vec{x})-6(\vec{x}\cdot\vec{y})+(\vec{y}\cdot\vec{y})=$

$=9\cdot2-6\cdot(-1)+3=27\Rightarrow|\vec{b}|=+\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{27}}=-\frac{\sqrt{30}}{18}$

7. $\vec{x}\times\vec{y}=(0, 2, 1)$ Se normaliza y se multiplica por el módulo deseado.

$\pm\frac{\vec{x}\times\vec{y}}{|\vec{x}\times\vec{y}|}\sqrt{20}=\pm\left(0, \frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}\right)=\pm(0, 4, 2)$

8. $\vec{u}+2\vec{v}=(-2k+2, k+2, 3)$

$(\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{v}=0\Rightarrow-2k+2+k+2-3=0\Rightarrow k=1$

9. Se hallan tres vectores cualesquiera ortogonales al vector $\vec{a}$ y se normalizan. Por ejemplo:

$\vec{x}=(5, 3, 0)$, $\vec{y}=(1, 0, 3)$, $\vec{z}=(0, 1, -5)$

$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}=\left(\frac{5}{\sqrt{34}},\frac{3}{\sqrt{34}},0\right)$, $\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\frac{\vec{z}}{|\vec{z}|}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{-5}{\sqrt{26}}\right)$ Basta comprobar que $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ son linealmente dependientes: $\begin{vmatrix}5&3&0\\1&0&3\\0&1&-5\end{vmatrix}=-15+15=0$

10. $\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-16}{\sqrt{35}\sqrt{38}}\Rightarrow\alpha\approx116^\circ1'$

$\cos\beta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\,|\vec{c}|}=\frac{-6}{\sqrt{35}\sqrt{18}}\Rightarrow\beta\approx103^\circ50'$

$\cos\gamma=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\,|\vec{c}|}=\frac{10}{\sqrt{38}\sqrt{18}}\Rightarrow\gamma\approx67^\circ31'$

$\cos\phi=\frac{(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{c}-\vec{a}|\,|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{-15}{\sqrt{65}\sqrt{41}}\Rightarrow\phi\approx106^\circ54'$

11. $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}=(6, 54, -78)$

$\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})=(39, 52, -91)$

$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]=12$

$|(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}|=\sqrt{6^2+54^2+(-78)^2}=\sqrt{9036}$

$|\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})|=\sqrt{39^2+52^2+(-91)^2}=\sqrt{12506}$

12. $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=(\vec{u}\times\vec{u})-(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{v}\times\vec{u})-(\vec{v}\times\vec{v})=$

$=\vec{0}-(\vec{u}\times\vec{v})-(\vec{u}\times\vec{v})-\vec{0}=-2(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{u}\times(-2\vec{v})$

13. $\begin{vmatrix}-1&0&3\\-2&-3&1\\k&2&-1\end{vmatrix}=2009\Rightarrow9k-13=2009\Rightarrow k=\frac{674}{3}$

14. $\vec{w}=\vec{v}\times\vec{u}=(2, 4, 3)$

$\vec{w}\cdot\vec{x}=\vec{w}\cdot(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=\lambda(\vec{w}\cdot\vec{u})+\mu(\vec{w}\cdot\vec{v})=\lambda\cdot0+\mu\cdot0=0$

luego es ortogonal a todos ellos.

15. Para comprobarlo se toma un vector cualquiera de V^2, por ejemplo $\vec{u}+2\vec{v}=(0, -6,7)$ y se multiplica escalarmente por otro vector de V^1, por ejemplo,

$-3\vec{w}=(-30,-21,-18)$.

$(0, -6,7)\cdot(-30, -21, -18)=0+126-126=0$

Para demostrarlo, se toma el caso general:

$(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\alpha\vec{w}=\lambda\alpha(\vec{u}\cdot\vec{w})+\mu\alpha(\vec{v}\cdot\vec{w})=$

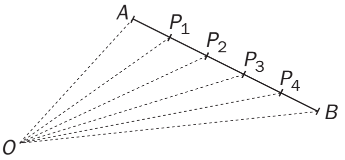
$=(\lambda\alpha)\cdot0+(\mu\alpha)\cdot0=0$

5 Planos y rectas en el espacio

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Dividir un segmento en partes iguales.	**1.** Determina cuatro puntos, P_1, P_2, P_3 y P_4, que dividan al segmento de extremos $A(7, -3, 8)$ y $B(-8, 2, -2)$ en cinco partes iguales. **2.** Si $M(3, 5, -1)$ es el punto medio del segmento AB y $B(10, 6, 3)$, ¿cuál es A?
B. Hallar las coordenadas del baricentro de un triángulo.	**3.** Los vértices de un triángulo son $A(1, 2, 3)$, $B(7, 0, -4)$ y $C(-2, 4, -2)$. Determina: a) Las coordenadas del punto medio, M, del lado AB. b) Las coordenadas del baricentro, G, del triángulo. c) ¿Qué relación hay entre los vectores $\overrightarrow{CG}$ y $\overrightarrow{GM}$?
C. Conocer y saber hallar las distintas ecuaciones de una recta, pasar de unas a otras y determinar con ellas puntos de la recta y su vector director.	**4.** Expresa de forma paramétrica, continua e implícita la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (1, 1, 2)$. **5.** Dada la recta de ecuación $\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x - y - z = -1 \end{cases}$, determina: a) Sus ecuaciones paramétricas. b) Las coordenadas de un punto de la recta y de su vector director.
D. Saber determinar un plano de distintas formas y saber hallar en cada caso su ecuación.	**6.** Calcula la ecuación general del plano que contiene a los puntos $A(0, -1, 5)$, $B(2, 1, -1)$ y $C(1, 2, 1)$. **7.** Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r\colon \frac{x+2}{5} = \frac{y}{-2} = z - 3$ y al punto $P(6, 5, -2)$.
E. Hallar la ecuación de un plano del que se conoce un punto y la dirección del vector normal.	**8.** Los vectores directores de un plano son $\vec{u} = (1, -1, 5)$ y $\vec{v} = (0, 2, -3)$, y $A(3, 3, 3)$ es un punto del mismo. Halla el vector normal del plano, y con él y el punto A, la ecuación general del plano. **9.** Halla la ecuación del plano que corta perpendicularmente a la recta $r\colon (1 - \lambda, 2\lambda, 3 + \lambda)$ y pasa por el origen de coordenadas.
F. Saber hallar proyecciones de puntos sobre rectas y de puntos y rectas sobre planos.	**10.** Calcula la longitud del segmento $A'B'$ que se obtiene al proyectar el segmento de extremos $A(2, -2, 2)$ y $B(-3, 8, -1)$ sobre el plano $\pi\colon x + y - z + 5 = 0$. **11.** Halla la proyección del punto $P(5, 2, 2)$ sobre la recta $r\colon x + 2 = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{2}$. **12.** Determina las ecuaciones paramétricas de la proyección ortogonal del eje X sobre el plano $x - y - 3z - 5 = 0$.
G. Resolver problemas de paralelismo, perpendicularidad e intersección de rectas y planos.	**13.** Halla la ecuación de la recta paralela a los planos $\pi\colon 3x - y + z = -4$, $\sigma\colon x + y = 0$ y que pasa por el punto $A(5, 4, 3)$. Expresa la ecuación en forma continua. **14.** Determina la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 0, -1)$ y corta perpendicularmente a la recta $s\colon \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$.
H. Efectuar el estudio de la posición relativa entre dos rectas, entre una recta y un plano, y entre dos o tres planos.	**15.** Las rectas de ecuaciones $r_1\colon \begin{cases} x - y - z = -4 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases}$ y $r_2\colon \begin{cases} y - 2z = -1 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$ se cortan en un punto P. Halla las coordenadas de P y la ecuación del plano que contiene a las dos rectas. **16.** Se considera la recta $r\colon \begin{cases} x + my + z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$ y el plano $\pi\colon x + 7 - z = n$. Estudia su posición relativa según los valores de los parámetros m y n, es decir: a) ¿Para qué valores de m se cortan? b) ¿Para qué valores de m y n está la recta contenida en el plano? c) ¿Para qué valores de m y n son paralelos? d) ¿Para qué valores de m y n se cortan en el punto $P(1, 1, 4)$?

Soluciones

1. $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$



$$\overrightarrow{OP_1} = (7, -3, 8) + \frac{1}{5}(-15, 5, -10) = (4, -2, 6) \Rightarrow P_1(4, -2, 6)$$

$$\overrightarrow{OP_2} = (7, -3, 8) + \frac{2}{5}(-15, 5, -10) = (1, -1, 4) \Rightarrow P_2(1, -1, 4)$$

Análogamente, $P_3(-2, 0, 2)$ y $P_4(-5, 1, 0)$.

2. $\frac{x+10}{2} = 3 \Rightarrow x = -4$, $\quad \frac{y+6}{2} = 5 \Rightarrow y = 4$

$\frac{z+3}{2} = -1 \Rightarrow z = -5$. El punto es $A(-4, 4, -5)$.

3. a) $M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(4, 1, -\frac{1}{2}\right)$

b) $G\left(\frac{1+7-2}{3}, \frac{2+0+4}{3}, \frac{3-4-2}{3}\right) = (2, 2, -1)$

c) $\overrightarrow{CG} = (4, -2, 1)$, $\overrightarrow{GM} = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)$

Luego $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GM}$.

4. $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}$

En forma implícita: $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x - z = -5 \end{cases}$.

5. a) Se suman las ecuaciones y se obtiene:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 3x - 3z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $A(2, 5, 0)$, $\vec{u} = (1, 1, 1)$

6. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 2, -6) \qquad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 3, -4)$.

El plano pedido es $\pi(A, \vec{u}, \vec{v})$: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 2 & 3 & y+1 \\ -6 & -4 & z-5 \end{vmatrix} = 0$

Operando, $10x + 2y + 4z = 18 \Leftrightarrow 5x + y + 2z = 9$.

7. $A(-2, 0, 3)$ pertenece a la recta y al plano.

$\pi(P, \vec{u}, \overrightarrow{AP})$: $\begin{vmatrix} 5 & 8 & x-6 \\ -2 & 5 & y-5 \\ 1 & -5 & z+2 \end{vmatrix} = 0$. Desarrollando, resulta $5x + 33y + 41z = 113$.

8. $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-7, 3, 2)$

$\vec{w} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \Rightarrow (-7, 3, 2) \cdot (x - 3, y - 3, z - 3) = 0$

y se obtiene $-7x + 3y + 2 = -6$.

9. $\vec{w} = (-1, 2, 1)$ y como pasa por $O(0, 0, 0)$, la ecuación pedida es $-x + 2y + z = 0$.

10. El vector normal del plano es $\vec{w} = (1, 1, -1)$.

$r(A, \vec{w})$: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda, \; A' = r \cap \pi \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

$(2 + \lambda) + (-2 + \lambda) - (2 - \lambda) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

El punto A' es $(1, -3, 3)$.

De forma análoga, para B se obtiene $\lambda = -\frac{11}{3}$ y $B\left(-\frac{20}{3}, \frac{13}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Longitud $= \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{1014}$.

11. Se calcula $\pi(P, \vec{u})$, donde $\vec{u} = (1, 0, 2)$ es el vector director de r. π: $(1, 0, 2) \cdot (x - 5, y - 2, z - 2) = 0$, es decir, π: $x + 2z = 9$.

$$P' = r \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 3 + 2\lambda \\ x + 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P'(-1, 0, 5)$$

12. Se halla el plano σ que verifica $\begin{cases} \{y = 0, z = 0\} \subset \sigma \\ \sigma \perp \pi \end{cases}$ y la recta pedida es $r = \pi \cap \sigma$.

σ: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3y - z = 0$

r: $\begin{cases} x - y - 3z = 5 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 10\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

13. Vector director: $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 4)$

La recta es: r: $\frac{x-5}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{4}$.

14. Un punto genérico de s es $A(3 - \lambda, 1 + 2\lambda, -3 + \lambda)$ y tiene que cumplirse que $\vec{u} \perp \overrightarrow{AP}$, donde A es la proyección de P sobre la recta; por tanto,

$(-1, 2, 1) \cdot (-2 + \lambda, -1 - 2\lambda, 2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$.

La proyección de P sobre la recta es $P'\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ y la recta buscada es la que pasa por P y P', es decir, r: $(1 + \mu, \mu, -1 - \mu)$.

15. $P = r_1 \cap r_2 = (13, 11, 6)$

π: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & x-13 \\ 2 & 2 & y-11 \\ 1 & 1 & z-6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - 2z + 1 = 0$

16. Hallando el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 7 & -1 & n \end{pmatrix}$ se obtiene: $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 3$ para todo m y n. Se cortan para cualquier valor de m y n.

Se cortan en $P(1, 1, 4)$ para $m = -4$ y $n = 4$.

6 Propiedades métricas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Hallar el ángulo que determinan dos vectores y el ángulo entre dos rectas.	**1.** Halla el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{u} = (2, -2, -1)$ y $\vec{v} = (1, k, 2k + 1)$: a) Tengan la misma dirección b) Sean ortogonales c) Formen un ángulo de 120° **2.** Calcula los tres ángulos del triángulo de vértices $A(2, 0, 1)$, $B(4, -2, 2)$ y $C(5, 4, 1)$. **3.** Determina el ángulo que definen las rectas $r: \begin{cases} x-2y+5=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=-3+t \\ y=2 \\ z=2+t \end{cases}$.
B. Hallar el ángulo que determinan dos planos secantes y el ángulo entre recta y plano.	**4.** El plano $\pi: 3x - 2y + 6z - 12 = 0$ determina con los tres planos de coordenadas un tetraedro de vértices O, A, B y C. De los seis ángulos diedros del tetraedro, tres son rectos. Calcula la medida de los otros tres ángulos diedros. **5.** La recta $r: \frac{x}{-2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{14}$ corta a los planos $\pi: x + y + z = 0$ y $\sigma: 3y - 4z = 7$. a) Justifica que los corta hallando el ángulo que forma con cada uno. b) ¿Cuál es la medida del ángulo diedro que forman los planos? c) Calcula el ángulo que forma la recta r con la recta $s = \pi \cap \sigma$.
C. Efectuar proyecciones de puntos sobre rectas y planos.	**6.** Se consideran el punto $P(1, 0, 7)$, la recta $r: \begin{cases} x=2 \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + z = 3$. Halla las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 que se obtienen al proyectar ortogonalmente el punto P sobre la recta y el plano, respectivamente. **7.** Determina la longitud del segmento $A'B'$ que se obtiene al proyectar ortogonalmente el segmento de extremos $A(3, 1, -4)$ y $B(0, -1, 1)$ sobre el plano $\pi: x + 2y - 2z + 4 = 0$.
D. Calcular la recta proyección de una recta dada sobre un plano determinado.	**8.** Dada la recta $r: (1 + t, -2 + 3t, 3)$ y el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$, halla: a) La posición relativa de la recta y el plano. b) La distancia de la recta al plano. c) La ecuación de la recta r', proyección ortogonal de r sobre el plano π.
E. Hallar la distancia entre dos puntos, entre punto y recta, punto y plano, rectas y planos paralelos, y rectas que se cruzan.	**9.** Se considera la recta $r: \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3y + z = -2 \end{cases}$ y el punto $P(1, 0, -1)$. Halla: a) El punto de la recta r más cercano a P. b) La distancia del punto P a la recta r. c) La recta que corta perpendicularmente a r y pasa por P. **10.** Halla la distancia entre las rectas $r: \begin{cases} x-2y+5=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=-3+t \\ y=2 \\ z=2+t \end{cases}$ **11.** Justifica que la recta $r: \begin{cases} x+y=5 \\ y+z=6 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 2y + z + 5 = 0$ son paralelos y halla la distancia entre ambos.
F. Calcular el área de un triángulo y el volumen de un tetraedro cuando se conocen las coordenadas de sus vértices.	**12.** Los puntos $A(1, 3, -1)$ y $B(3, 7, -3)$ son vértices de un triángulo de área $S = \sqrt{\frac{12}{7}}$, y el tercer vértice C pertenece a la recta de ecuación $r: x = y = z$. Determina las coordenadas del vértice C. **13.** Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 1, -1)$, $C(1, -1, 1)$ y $D(-1, 1, 1)$ son los vértices de un tetraedro. a) Comprueba que no son coplanarios. b) Halla el volumen del tetraedro. c) Calcula el área de cada una de sus caras.

Soluciones

1. a) $\frac{1}{2}=\frac{k}{-2}=\frac{2k+1}{-1}\Rightarrow k=-1$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(2,-2,-1)\cdot(1,k,2k+1)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow 2-2k-2k-1=0\Rightarrow k=\frac{1}{4}$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos 120^\circ=19k^2-68k-14=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow k=\frac{68\pm\sqrt{5688}}{38}$$

Para $k_1=\frac{68-\sqrt{5688}}{38}$, el ángulo es de 60°.

Para $k_2=\frac{68+\sqrt{5688}}{38}\approx 3{,}77$, se obtiene 120°.

2. $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, $\overrightarrow{AC}=(3,4,0)$, $\overrightarrow{BC}=(1,6,-1)$

$$\cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{6-8}{3\cdot 5}=-\frac{2}{15}\Rightarrow\hat{A}\approx 97^\circ\ 40'$$

$$\cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{11}{3\sqrt{38}}\Rightarrow\hat{B}\approx 53^\circ\ 30'$$

$\hat{C}\approx 28^\circ\ 50'$

3. Los vectores directores son $\vec{u}=(-2,-1,2)$ y $\vec{v}=(1,0,1)$;

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{0}{3\sqrt{2}}=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$$

4. Los vectores normales de los planos XY, XZ e YZ son, respectivamente, $\vec{k}=(0,0,1)$ y $\vec{j}=(0,1,0)$ y $\vec{i}=(1,0,0)$, el del plano π, $\vec{w}=(3,-2,6)$.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{w}\cdot\vec{k}|}{|\vec{w}||\vec{k}|}=\frac{|6|}{7\cdot 1}=\frac{6}{7}\Rightarrow\alpha\approx 31^\circ\ 0'\ 10''$$

$$\cos\beta=\frac{|\vec{w}\cdot\vec{j}|}{|\vec{w}||\vec{j}|}=\frac{|-2|}{7\cdot 1}=\frac{2}{7}\Rightarrow\beta\approx 73^\circ\ 23'\ 54''$$

$$\cos\gamma=\frac{|\vec{w}\cdot\vec{i}|}{|\vec{w}||\vec{i}|}=\frac{|3|}{7\cdot 1}=\frac{3}{7}\Rightarrow\gamma\approx 64^\circ\ 37'\ 23''$$

5. a) Los vectores normales de los planos son $\vec{w}=(1,1,1)$ y $\vec{v}=(0,3,-4)$. El vector director de la recta es $\vec{u}=(-2,5,14)$. Los ángulos son:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{|\vec{w}\cdot\vec{u}|}{|\vec{w}||\vec{u}|}=\frac{|17|}{15\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha\approx 40^\circ\ 52'\neq 0^\circ$$

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{u}|}{|\vec{v}||\vec{u}|}=\frac{41}{75}\Rightarrow\beta\approx 33^\circ\ 8'\neq 0^\circ$$

No es paralela a los planos, luego los corta.

b) $\cos\phi=\frac{|\vec{w}\cdot\vec{v}|}{|\vec{w}||\vec{v}|}=\frac{|1|}{5\sqrt{3}}\Rightarrow\phi\approx 83^\circ\ 22'\ 9''$

c) Vector director de s: $\vec{w}\times\vec{v}=\vec{s}=(-7,4,3)$.

$$\cos\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{s}|}{|\vec{u}||\vec{s}|}=\frac{76}{15\sqrt{74}}\Rightarrow\delta\approx 53^\circ\ 54'\ 53''$$

6. Punto de r: $A(2,\lambda,1-\lambda)$, $\overrightarrow{AP}=(-1,-\lambda,6+\lambda)$.
Vector director de r: $\vec{u}=(0,1,-1)$ y como $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AP}=$ $=0\Rightarrow -2\lambda-6=0\Rightarrow\lambda=-3\Rightarrow P_1(2,-3,4)$.
Se toma la recta $s(P,\vec{w})\perp\pi$ y su intersección da la proyección: $\{x=1+2\mu,\ y=\mu,\ z=7+\mu\}\cap\pi$.
Al resolver se obtiene $\mu=-1\Rightarrow P_2(-1,-1,6)$.

7. Proyección de A:

$$\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=-4-2\lambda\\ x+2y-2z+4\end{cases}\Rightarrow\lambda=-\frac{19}{9}\Rightarrow A'\left(\frac{10}{9},-\frac{25}{9},-\frac{2}{9}\right)$$

B' es B, ya que $B\in\pi$; $|\overrightarrow{A'B'}|=\frac{\sqrt{53}}{3}$ u

8. a) $\vec{u}=(1,3,0)$, $\vec{w}=(3,-1,2)$. Como $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$, la recta es paralela al plano.

b) $d(r,\pi)=d(A,\pi)=\frac{|3+2+6-4|}{\sqrt{9+1+4}}=\frac{7\sqrt{14}}{14}=\frac{1}{2}\sqrt{14}$ u

c) Se halla $\sigma\perp\pi$ con $r\subset\sigma$:
σ: $3x-y-5z+10=0$

$$r'=\pi\cap\sigma:\begin{cases}3x-y+2z=4\\ 3x-y-5z=-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\lambda\\ y=3\lambda\\ z=2\end{cases}$$

9. a) Punto genérico de r: $P'(1+2\lambda,\lambda,-2-3\lambda)$, luego $\overrightarrow{PP'}\perp\vec{u}\Rightarrow\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow\lambda=-\frac{3}{14}\Rightarrow$
$\Rightarrow P'\left(\frac{8}{14},-\frac{3}{14},-\frac{19}{14}\right)$

b) $d(P,r)=|\overrightarrow{PP'}|=\frac{1}{14}\sqrt{70}$ u

c) Se toma $\vec{v}=-14\overrightarrow{PP'}=(6,3,5)$ y se obtiene $s(P,\vec{v})=(1+6\mu,3\mu,-1+5\mu)$.

10. $d(r,s)=\frac{\left|[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ u

11. $\vec{u}=(-1,1,-1)$, $A(5,0,6)$, $\vec{w}=(1,2,1)$. Como $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$, son paralelos. $d(r,\pi)=d(a,\pi)=\frac{|5+6+5|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{16}{\sqrt{6}}$ u

12. $C(\lambda,\lambda,\lambda)$, $\overrightarrow{AB}=(2,4,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(\lambda-1,\lambda-3,\lambda+1)$,
$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\Rightarrow\sqrt{\frac{12}{7}}=\frac{1}{2}\sqrt{56\lambda^2-16\lambda+8}\Rightarrow$
$\Rightarrow\lambda=\frac{1}{7}\Rightarrow C\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)$

13. a) $\pi(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$: $\begin{vmatrix}0&0&x-1\\0&-2&y-1\\-2&0&z-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-1=0$
Como $D\notin\pi$, no son coplanarios.

b) $V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}|\Rightarrow\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&0\end{matrix}\right\|=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ u^3

c) $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|(-4,0,0)|=2$ u^2
Igualmente, $S_{ABD}=S_{ACD}=2$, $S_{BCD}=2\sqrt{3}$ u^2.

7 Lugares geométricos en el espacio

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Escribir las ecuaciones paramétricas de cualquier cónica en el plano.	**1.** Escribe las ecuaciones parámetricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(2, -3)$ y radio $r = 5$. Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro en las ecuaciones paramétricas $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$ **2.** Escribe las ecuaciones paramétricas e implícita de la elipse de focos $F(-1, -1)$ y $F'(-1, 3)$ y eje mayor $2a = 6$.
B. Expresar la ecuación de una cónica en forma implícita cuando se conoce su ecuación paramétrica, y viceversa.	**3.** Las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2\sqrt{1+\text{sen}^2 t} \\ y = 2\,\text{sen}\,t \end{cases}$ corresponden a una parte de la cónica de ecuación $\begin{cases} x = 2\sqrt{1+k^2} \\ y = 2k \end{cases}$. Escribe la ecuación inplícita de la cónica, identifica de qué cónica se trata y efectúa la representación gráfica correspondiente a la parte que definen las primeras ecuaciones paramétricas.
C. Calcular puntos y hallar la ecuación en forma implícita de curvas y superficies en el espacio, dadas mediante sus ecuaciones paramétricas.	**4.** Identifica la superficie que definen las ecuaciones paramétricas siguientes e indica un punto de cada una: $S_1\colon \begin{cases} x = 2 - t + 2s \\ y = -5 + t + s, \\ z = 3t - s \end{cases}$ $S_2\colon \begin{cases} x = 2 - t + 2s \\ y = -5 + t - 2s, \\ z = 3 + 2t - 4s \end{cases}$ $S_3\colon \begin{cases} x = 5\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ y = 5\cos\alpha\cos\beta \\ z = 3 + 5\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$ **5.** Halla las ecuaciones implícitas de la curva $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t^2 \\ z = 2t \end{cases}$ y determina tres de sus puntos.
D. Determinar la ecuación de cuádricas sencillas (elipsoide, paraboloide, hiperboloide).	**6.** Determina los ejes y los vértices del elipsoide de ecuación $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$. ¿Qué curva se obtiene al cortar el elipsoide por el plano $x = 0$? ¿Y si es cortado por el plano $z = 0$?
E. Hallar la ecuación de la superficie esférica conociendo: centro y radio, extremos de un diámetro, centro y recta o plano tangente, cuatro puntos no coplanarios.	**7.** Los puntos $A(7, -2, 5)$ y $B(-1, -4, 1)$ son los extremos de un diámetro de una superficie esférica. Escribe sus ecuaciones paramétricas e implícita. **8.** Una superficie esférica pasa por los puntos $A(0, 0, 2)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 0, 0)$ y $D(4, 4, 4)$. Calcula su ecuación implícita y determina su centro y su radio. **9.** Escribe la ecuación de la superficie esférica de centro $C(1, 0, -1)$ tangente a la recta $r : (1 + \lambda, 2\lambda, 5 - 2\lambda)$.
F. Identificar una superficie esférica, su centro y radio a partir su ecuación en cualquiera de sus formas.	**10.** Se considera la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$, determina: su centro, su radio, sus ecuaciones paramétricas y el volumen de la esfera que delimita.
G. Resolver problemas de incidencia, tangencia, intersección y posición relativa con superficies esféricas.	**11.** Dado el plano de ecuación $\pi : 2x - 2y - z + 3 = 0$, y el punto $C(5, 0, 1)$, determina: a) La ecuación de la superficie esférica de centro C y tangente al plano. b) La ecuación de otro plano distinto y paralelo a π que también sea tangente a la superficie esférica.
H. Calcular las ecuaciones de superficies cónicas, cilíndricas, de traslación, de revolución y cuádricas en las coordenadas apropiadas en cada caso	**12.** Calcula las ecuaciones paramétricas de la superficie que se obtienen al girar la curva $C : \begin{cases} x = y^2 \\ y = z \end{cases}$, alrededor del eje Z.

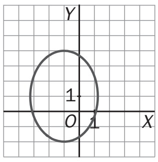
Soluciones

1. $\begin{cases} x = 2 + 5\cos t \\ y = -3 + 5\,\text{sen}\,t \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

Puntos: $P_1(7, -3)$, $P_2\left(\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-6+5\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_3(-3, -3)$,

$P_4(2, -8)$ y $P_5\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{-6-5\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Centro $C(-1, 1)$.

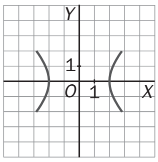


Semiejes: $a = 3$, $b = \sqrt{5}$.

Ec. implícita: $\dfrac{(x+1)^2}{5} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

Ecs. paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{5}\,\text{sen}\,t \\ y = 1 + 3\cos t \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 = 4 + 4k^2 \\ y^2 = 4k^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 + y^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. Se trata de una hipérbola equilátera centrada en el origen. Como $-1 \le \text{sen}\,t \le 1$ y $-1 \le \cos t \le 1$, resulta que $-2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2}$ y que $-2 \le y \le 2$.



4. S_1 corresponde al plano de ecuación implícita $4x - 5y + 3z - 33 = 0$.

S_2 es una recta, ya que con el cambio $k = 5 - 2s$ se tiene S_2: $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = -5 + k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$, es decir, $\begin{cases} x + y = -3 \\ 2x + z = 7 \end{cases}$.

S_3 es una superficie esférica de centro $C(0, 0, 3)$, radio 5 y ecuación implícita $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$. Para hallar un punto de cada una, se igualan a 0 los parámetros: $P_1(2, -5, 0)$, $P_2(2, -5, 3)$ y $P_3(0, 5, 3)$.

5. Se despeja $t = x + 2$ y se sustituye:

$\begin{cases} y = (x+2)^2 \\ z = 2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - y + 4 = 0 \\ 2x - z + 4 = 0 \end{cases}$

Tomando $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$ se obtienen:

$A(-2, 0, 0)$, $B(-1, 1, 2)$ y $C(0, 4, 4)$.

6. $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{4^2} + \dfrac{z^2}{4} = 1$. Ejes: $2a = 8$, $2b = 8$, $2c = 4$.

Vértices: $A(4, 0, 0)$, $A'(-4, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $B'(0, -4, 0)$, $C(0, 0, 2)$ y $C'(0, 0, -2)$.

Si $x = 0 \Rightarrow \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1$, elipse de ejes $2b = 8$, $2c = 4$.

Si $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$, circunferencia de radio 4.

7. Centro: $C\left(\dfrac{7-1}{2}, \dfrac{-2-4}{2}, \dfrac{5+1}{2}\right) = (3, -3, 3)$

Radio: $r = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$

Ecuación implícita: $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 21$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + \sqrt{21}\cos\alpha\cos\beta \\ y = -3 + \sqrt{21}\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ z = 3 + \sqrt{21}\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$

8. $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$. Sustituyendo los puntos se obtiene:

$$\begin{cases} 2C + D = -4 \\ 2B + D = -4 \\ 2A + D = -4 \\ 4A + 4B + 4C + D = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -22/5 \\ B = -22/5 \\ C = -22/5 \\ D = 24/5 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{22}{5}x - \dfrac{22}{5}y - \dfrac{2}{5}z + \dfrac{24}{5} = 0\cdot$

Centro $M\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{11}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$, radio $r = \sqrt{3\left(\dfrac{11}{5}\right)^2 - \dfrac{24}{5}} = \dfrac{9}{5}\sqrt{3}$.

9. $R = d(C,r) = \dfrac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{\sqrt{0^2 + (-12)^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5}$

Ecuación: $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 20$

10. Centro $C(2, -3, -1)$, radio 4, volumen $\dfrac{256}{3}\pi$.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 + 4\cos\alpha\cos\beta \\ y = -3 + 4\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ z = -1 + 4\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$

11. Radio $R = d(C,\pi) = \dfrac{|10 - 1 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 4$

a) $(x-5)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$

b) El plano buscado es

$$d(C,\sigma) = R \Rightarrow \frac{|10 - 1 + D|}{3} = 4 \Rightarrow |9 + D| = 12 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 3 \\ D_2 = -21 \end{cases}.$$

Luego $\sigma : 2x - 2y - z - 21 = 0$

12. La curva es $C : \left\{t^2, t, t\right\}$, luego las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución son:

$\begin{cases} x = t^2\cos s - t\,\text{sen}\,s \\ y = t^2\,\text{sen}\,s + t\cos s \\ z = t \end{cases}$

Prueba inicial (Análisis matemático)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. La arista de la base de un prisma recto de base cuadrada mide x cm y las aristas laterales son el triple de las aristas de la base.

a) Escribe la función que permite calcular el área lateral del prisma cuando se conoce x.

b) Escribe la función que determina el área total del prisma.

c) Expresa el volumen del prisma en función de x.

d) Calcula el área lateral, total y volumen del prisma (con las condiciones anteriores) si la arista de la base mide 5 cm.

2. Se considera la función de variable natural $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \text{ es par} \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si} \quad x \text{ es impar} \end{cases}$. Calcula los siguientes valores:

a) $f(56)$ b) $f(101)$ c) $(f \circ f \circ f)(422)$ d) $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$ si $50 \leqslant x \leqslant 128$

3. Calcula el dominio de las funciones de variable real:

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - x - 2}$ c) $h(x) = \sqrt{8 - 3x}$ d) $k(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$

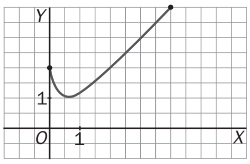
4. Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \dfrac{3}{x+4}$ y $h(x) = \sqrt{x}$. Efectúa las siguientes operaciones con ellas:

a) $(f + g)(-1)$ c) $(f \circ g)(2)$ e) $(h \circ f)(3)$ g) $(g \cdot f)(x)$ i) $(f \circ h)(x)$

b) $(h \cdot f)(4)$ d) $(g \circ h)(9)$ f) $(f + g)(x)$ h) $(g \circ f)(x)$

5. La gráfica representada corresponde a una función $f(x)$. ¿Cuál es su dominio? ¿Qué recorrido tiene? Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones:

a) $-f(x)$ b) $2 \cdot f(x)$ c) $2 + f(x)$ d) $f(x + 2)$ e) $f(-x)$



6. Los cortes con los ejes de una función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ son $A(1, 0)$, $B(5, 0)$ y $C(0, 3)$. Halla sus coeficientes y determina las coordenadas del vértice.

7. Se considera la función $f(x) = x^2$. Calcula:

a) $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ b) $\dfrac{f(1{,}4) - f(1)}{1{,}4 - 1}$ c) $\dfrac{f(1{,}02) - f(1)}{1{,}02 - 1}$ d) $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1}$ e) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1}$

8. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si} \quad -6 \leqslant x < -2 \\ |x| & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x + 4 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 6 \end{cases}$ e indica su dominio, recorrido, máximos y mínimos relativos e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

9. Justifica si las siguientes parejas de funciones son iguales o no:

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$ y $g(x) = x$

c) $f(x) = \log\left(\dfrac{x+3}{2-x}\right)$ y $g(x) = \log(x + 3) - \log(2 - x)$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$ y $g(x) = (x + 1)(x - 2)$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-2x - 10}{x - 2}}$ y $g(x) = \dfrac{\sqrt{-2x - 10}}{\sqrt{x - 2}}$

10. Determina los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim \left(\dfrac{1 + 2n}{n}\right)^n$ b) $\lim \left(\dfrac{1 + 2n}{2 + 3n}\right)^{n-1}$ c) $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ d) $\lim \left(\dfrac{2n + 1}{2n}\right)^n$

11. Halla los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}\right)$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}\right)$ d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)$

12. Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ k - 5x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ sea continua.

Soluciones

1. a) $A_L(x) = 4 \cdot (x \cdot 3x) = 12x^2$ cm² c) $V(x) = x^2 \cdot 3x = 3x^2$ cm³

b) $A_T(x) = 2x^2 + 12x^2 + 14x^2$ cm² d) $A_L(5) = 12 \cdot 5^2 = 300$ cm², $A_T(5) = 14 \cdot 5^2 = 350$ cm², $V(5) = 3 \cdot 5^3 = 375$ cm³

2. a) $f(56) = \frac{56}{2} = 28$ b) $f(101) = \frac{101+1}{2} = 51$ c) $(f \circ f \circ f)(422) = f(f(f(422))) = f(f(211)) = f(106) = 53$

d) La función f es no creciente, luego el mayor valor se obtiene para $x = 128$ y el menor para $x = 50$. Se calcula:
$(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(128) = f(f(f(f(f(f(f(128))))))) = f(f(f(f(f(f(64)))))) = \ldots = f(f(4)) = f(2) = 1$
$(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(50) = f(f(f(f(f(f(f(50))))))) = f(f(f(f(f(f(25)))))) = f(f(f(f(f(13))))) = \ldots = f(f(2)) = f(1) = 1$
Luego la función es $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x) = 1$ constantemente en $50 \leqslant x \leqslant 128$.

3. a) $D(f) = \mathrm{R} = (-\infty, +\infty)$ c) $D(h) = \{x \in \mathrm{R} / 8 - 3x \geqslant 0\} = \left\{x \in \mathrm{R} / x \leqslant \frac{8}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

b) $D(g) = \{x \in \mathrm{R} / x^2 - x - 2 \neq 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$ d) $D(k) = \{x \in \mathrm{R} / \operatorname{sen} x \geqslant 0\} = [2k\pi, (2k+1)\pi]\ \forall k \in \mathrm{Z}$

4. a) $(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = (-3) + 1 = -2$ f) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - 4) + \frac{3}{x+4} = \frac{x^3 + 4x^2 - 4x - 13}{x+4}$

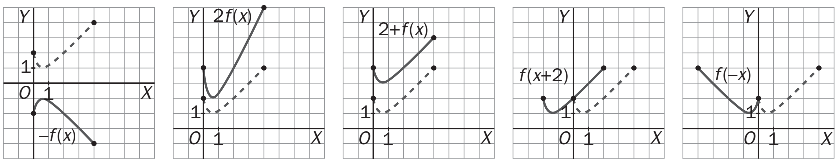
b) $(h \cdot f)(4) = h(4) \cdot f(4) = 2 \cdot 12 = 24$ g) $(g \cdot f)(x) = g(x) \cdot f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x + 4}$

c) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$ h) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 4) = \frac{3}{x^2}$

d) $(g \circ h)(9) = g(h(9)) = g(3) = \frac{3}{7}$ i) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = x - 4$

e) $(h \circ f)(3) = \sqrt{5}$

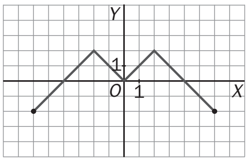
5. Dominio: $D = [0, 4]$. Recorrido: $R = [1, 4]$.



6. Raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = 5 \Rightarrow f(x) = a(x - 1)(x - 5)$. Pasa por $(0, 3) \Rightarrow 3 = 5a \Rightarrow a = \frac{3}{5}$. Por tanto, $f(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + 3$

7. a) 4 b) 2,4 c) 2,02 d) $\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = 2 + h$ e) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \lim\limits_{h\to 0}(2 + h) = 2$

8. Dominio: $D = [-6, 4]$. Recorrido: $R = [-2, 2]$.
Máx. relativos: $M_1(-2, 2)$ y $M_2(2, 2)$.
Mín. relativos: $m_1(-6, -2)$, $m_2(0, 0)$ y $m_3(6, -2)$.
Crecimiento: $(-6, -2) \cup (0, 2)$.
Decrecimiento: $(-2, 0) \cup (2, 6)$.



9. a) $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq g(x) = x$ c) $f(x) = \log\left(\frac{x + 3}{2 - x}\right) = g(x) = \log(x + 3) - \log(2 - x)$

b) $f(x) = x^2 - x - 2 = g(x) = (x + 1)(x - 2)$ d) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x - 10}{x - 2}} \neq g(x) = \frac{\sqrt{-2x - 10}}{\sqrt{x - 2}}$ pues $D(f) = [-5, 2) \neq D(g) = \varnothing$.

10. a) $+\infty$ b) 0, porque $0 < \frac{2}{3} < 1$ c) e d) $\sqrt{e}$

11. a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim\limits_{x\to 1}(x + 1) = 2$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}\right) = \lim\limits_{x\to -2}\frac{(x + 1)}{(x - 2)} = \frac{1}{4}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

12. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(x) \Rightarrow 8 = k - 10 \Rightarrow k = 18$

8 Límites de sucesiones y de funciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Saber estudiar la monotonía de una sucesión y determinar sus cotas si las tuviera.	**1.** Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{2n+87}{n+1}$ es mónotona y está acotada. Determina la menor de las cotas superiores y la mayor de las inferiores. **2.** Estudia la monotonía y las cotas de la sucesión $a_n = \frac{n^2}{2n-1}$. ¿A partir de qué término los siguientes son mayores que $k = 2\,000\,000$?
B. Conocer y aplicar correctamente los métodos para resolver las indeterminaciones que surgen en las sucesiones.	**3.** Calcula los límites de las sucesiones racionales: a) $a_n = \frac{(2n-5)\cdot(7-3n)}{3-2n+n^2}$ b) $b_n = (-1)^n \cdot \frac{7-3n}{3-2n}$ c) $c_n = (-1)^n \cdot \frac{1+2n}{5+n^2}$ **4.** Calcula los siguientes límites de sucesiones: a) $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n}\right)$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+n}{2n-1}\right)^{5n+1}$ c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+2n}{2n-1}\right)^{5n+1}$
C. Clasificar correctamente las sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes.	**5.** Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{2n+7}{n+1}$ converge y que su límite es 2. ¿A partir de qué término de la sucesión se verifica que $\lvert a_n - 2 \rvert < 0{,}000001$? **6.** Determina si la sucesión $a_n = \frac{n^2+n}{2n-1} - \frac{n^2+5}{2n+1}$ es convergente o divergente y calcula, en su caso, su límite.
D. Obtener los límites laterales de una función en un punto y determinar la existencia o no existencia del límite.	**7.** Calcula los límites laterales en $x = 1$ de las siguientes funciones y decide si existe o no su límite en ese punto. a) $f(x) = \begin{cases} 3x-8 & \text{si } x<1 \\ x^2+ax & \text{si } x>1 \end{cases}$ b) $g(x) = 2 + \frac{x^2-1}{\lvert x-1 \rvert}$ c) $h(x) = e^{\frac{3}{1-x}}$ **8.** ¿Para qué valores del parámetro k existe el límite en $x = 2$ de la función $f(x) = \begin{cases} 3k^2x-5k^2 & \text{si } x<2 \\ x^2-2kx+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$? Calcula su límite en esos casos.
E. Demostrar en casos sencillos, mediante la definición métrica de límite, que el límite hallado por métodos algebraicos verifica la definición.	**9.** Aplica la definición métrica de límite para demostrar que: a) $\lim_{x\to 3}(2x+5) = 11$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2} = 8$ c) $\lim_{x\to 1^-}\frac{3}{1-x} = +\infty$ En el apartado b) determina el radio δ del entorno $E(2, \delta)$ que verifica la definición de límite para un $\varepsilon = 0{,}02$.
F. Resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ utilizando métodos algebraicos.	**10.** Calcula los siguientes limites: a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-x^3-4x}{x^2-x-2}$ c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{4}{x-2}}$ b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{5+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1}}$ d) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$
H. Resolver indeterminaciones por infinitésimos equivalentes.	**11.** Calcula los siguientes límites utilizando infinitésimos equivalentes adecuados. a) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,3x}{2x}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{\text{sen}(x-2)}{x^3-8}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,5x}{\text{tg}\,2x}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{e^x-1}$

Soluciones

1. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2(n+1)+87}{(n+1)+1} - \dfrac{2n+87}{n+1} = \dfrac{-85}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow$ es monótona decreciente.

La menor de las cotas superiores es $a_1 = \dfrac{89}{2}$ y la mayor de las inferiores es 2, su límite, ya que

$\dfrac{2n+87}{n+1} - 2 = \dfrac{85}{n+1} > 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$.

2. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{(n+1)^2}{2(n+1)-1} - \dfrac{n^2}{2n-1} = \dfrac{2n^2-1}{4n^2-1} > 0 \,\forall n \in \mathbf{N}$

Es monótona creciente.

Cota inferior $a_1 = 1$. No está acotada superiormente. Para hallar a partir de qué término $a_n > 2\,000\,000$ se resuelve la inecuación:

$\dfrac{n^2}{2n-1} > 2\,000\,000 \Leftrightarrow n^2 - 4 \cdot 10^6 n + 2 \cdot 10^6 > 0$ y eso ocurre $\forall n > 3\,999\,999{,}5$, es decir, a partir del término $a_{4\,000\,000}$.

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-5)(7-3n)}{3-2n+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2\left(2-\dfrac{5}{n}\right)\left(\dfrac{7}{n}-3\right)}{n^2\left(\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n}+1\right)} =$

$= \dfrac{2\cdot(-3)}{1} = -6.$

b) Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7-3n}{3-2n}\right) = \dfrac{3}{2}$ los términos de la sucesión $(-1)^n \cdot \dfrac{7-3n}{3-2n}$ se acercarán alternativamente a $-\dfrac{3}{2}$ y a $\dfrac{3}{2}$, por lo que no tiene límite y es oscilante.

c) Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2n}{5+n^2} = 0$ y

$-\dfrac{1+2n}{5+n^2} \leqslant (-1)^n \cdot \dfrac{1+2n}{5+n^2} \leqslant \dfrac{1+2n}{5+n^2}$ entonces

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1+2n}{5+n^2}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot \frac{1+2n}{5+n^2} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1+2n}{5+n^2} = 0$$

y el límite buscado es 0. Converge a 0.

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4n}{n+\sqrt{n^2+4n}} = \dfrac{-4}{1+1} = -2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+n}{2n-1}\right)^{5n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+2n}{2n-1}\right)^{5n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{2n-1}{4}\cdot\frac{4}{2n-1}\cdot(5n+1)} = e^{\frac{5}{2}}$

5. $\left|a_n - L\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2n+7}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{5}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{5}{\varepsilon} - 1$

Si $\varepsilon = 0{,}000001 \Rightarrow n > 4\,999\,999$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{2n-1} - \dfrac{n^2+5}{2n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-9n+5}{4n^2-1} = 1$, luego es convergente.

7. a) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(3x-8) = -5$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(x^2+ax) = 1+a$

Por tanto, el límite existe $\Leftrightarrow a = -6$.

b) $\lim\limits_{x\to1^-}\left(2+\dfrac{x^2-1}{|x-1|}\right) = \lim\limits_{x\to1^-}\big(2-(x+1)\big) = 0$

$\lim\limits_{x\to1^+}\left(2+\dfrac{x^2-1}{|x-1|}\right) = \lim\limits_{x\to1^-}\big(2+(x+1)\big) = 4$. No tiene límite.

c) $\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{3}{1-x}} = e^{+\infty} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{3}{1-x}} = e^{-\infty} = 0$

No tiene límite.

8. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2}(3k^2x - 5k^2) = k^2$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2}(x^2 - 2kx + 1) = 5 - 4k.$

Para que exista el límite, $k^2 = 5 - 4k \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -5 \end{cases}$

En el primer caso el límite es 1 y en el otro 25.

9. a) $|(2x+5)-11| < \varepsilon \Leftrightarrow 2\,|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta$

b) $\left|\dfrac{2x^2-8}{x-2} - 8\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2(x-2)^2}{x-2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta$

Si $\varepsilon = 0{,}02 \Rightarrow \delta = 0{,}01$

c) $\dfrac{3}{1-x} > k \Leftrightarrow 1-x < \dfrac{3}{k} \Leftrightarrow |x-1| < \dfrac{3}{k} = \delta$

10. a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-x^3-4x}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^3+x^2+2x)}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{16}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}}\right) = \sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{4}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)\left(\frac{4}{x-2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{-4}{2x}\right)} = e^{-1}$

d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1}{12\sqrt{3}}$

11. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{tg}2x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{2x} = \dfrac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^3-8} = \dfrac{1}{12}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{x} = 0$

9 Continuidad

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Estudiar la continuidad de una función en un punto.	**1.** Una función $f(x)$ está dada por la expresión $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$ si $x \neq 3$. ¿Cuál debe ser el valor de $f(3)$ para que la función sea continua en ese punto? ¿Quedaría algún otro punto de discontinuidad? ¿De qué tipo?
B. Saber hallar el dominio de continuidad de una función y su relación con el dominio de la misma.	**2.** Determina los dominios de definición y de continuidad de las siguientes funciones: a) $f(x) = x^2 - 2x$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x - 3}$ c) $f(x) = 1 - \sqrt{x - 3}$ d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - x}{x - 3}}$
C. Hallar los valores de ciertos parámetros en las funciones definidas a trozos para que sean continuas en un punto concreto o en un intervalo.	**3.** Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ -2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ sea continua en todo **R**. Represéntala. **4.** ¿Para qué valores de k es continua en **R** la función $f(x) = \begin{cases} 3k^2x - 5k^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2kx + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$?
D. Clasificar las discontinuidades de una función discontinua en varios puntos y efectuar una representación aproximada de la función en un entorno de esos puntos.	**5.** Estudia la continuidad de la función f, clasifica los puntos de discontinuidad, si hubiera alguna evitable indica cómo se eliminaría y represéntala gráficamente. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - e & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{3 + x}{x + 1} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} & \text{si } 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \\ k + \ln x & \text{si } x \geqslant \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$
E. Analizar si una función cumple, o no, las hipótesis del teorema de Bolzano.	**6.** La función $f(x) = (\ln x)^2 - 6 \ln x + 5$ es continua en todo su dominio $(0, +\infty)$. Determina dos intervalos disjuntos $[a, b]$ y $[b, c]$ en los que la gráfica de la función corte al menos una vez al eje de abscisas. Justifica la respuesta. ¿Podrías en este caso hallar todos los puntos de corte de la función con el eje X? **7.** ¿Es aplicable el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^3 - 2x - 7}$ en $[2, 4]$? Justifica la respuesta. ¿Se puede asegurar que la función corta al eje de abscisas en algún punto o, por el contrario, que no lo corta en ningún punto?
F. Determinar intervalos de la amplitud deseada en los que se encuentren las soluciones de una ecuación.	**8.** Justifica que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[1, 2]$. Calcula con un error menor que 0,1 la solución de la ecuación anterior.
G. Determinar si una función definida en un intervalo está acotada y en caso afirmativo encontrar el supremo y el ínfimo.	**9.** Demuestra que la función $f(x) = \dfrac{5e^x}{1 + e^x}$ está acotada. Indica el supremo y el ínfimo. ¿Tiene un máximo y un mínimo absoluto dicha función? ¿Por qué?
H. Aplicar e interpretar los teoremas de los valores intermedios y de Weierstrass.	**10.** Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x) = \dfrac{1 + e^{2x}}{1 + e^x}$, $\forall x \in [-3, 1]$.

Soluciones

1. Calculamos $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(2x+1)(x-3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{4}{7}.$

La función sería continua en $x=3 \Leftrightarrow f(3)=\dfrac{4}{7}$.

En $x=-\dfrac{1}{2}$ la función presenta una discontinuidad inevitable con salto infinito, ya que:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}=-\infty \quad \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}=+\infty$$

2. a) $D=\mathrm{R}$ c) $D=[3,+\infty)$

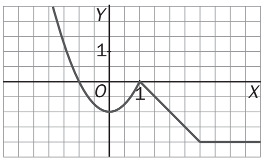
b) $D=\mathrm{R}-\{-1,3\}$ d) $D=[2,3)$

Las cuatro funciones son continuas en sus respectivos dominios.

3.
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax+b)=a+b\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(ax+b)=3a+b\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(-2)=-2\end{array}\right\}\Rightarrow 3a+b=-2$$

De donde se obtiene $a=-1$ y $b=1$.



4.
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3k^2x-5k^2)=k^2\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2kx+1)=5-4k\end{array}\right\}\Rightarrow k^2=5-4k$$

Se obtienen dos valores: $k=1$ y $k=-5$.

5. Se estudian los puntos en donde cambia la definición de la función.

$$x=-1\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(e^{-x}-e)=0\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{3+x}{x+1}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

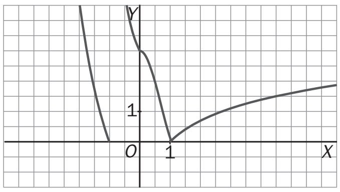
$\Rightarrow$ Discontinuidad inevitable de salto infinito.

$$x=0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+x}{x+1}=3\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}\,3x}{x}=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Discontinuidad evitable. Se elimina tomando $f(0)=3$.

$$x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)}\dfrac{\mathrm{sen}\,3x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)}(k+\ln x)=k+\ln\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sería continua si $k=-\ln\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$



6. Como $f(1)=5>0$ y $f(3)\approx -0{,}38<0\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_1\in(1,3)\,/\,f(x_1)=0$

Como $f(3)\approx -0{,}38<0$ y $f(e^6)=5>0\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_2\in(3,e^6)\,/\,f(x_2)=0$

En este caso x_1 y x_2 se pueden determinar de manera exacta, pues resolviendo la ecuación $f(x)=0$ se obtiene:

$$\ln x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}1\Rightarrow x_1=e\\ 5\Rightarrow x_2=e^5\end{cases}$$

7. La función $g(x)=x^3+2x-7$ es continua en $[2,4]$.

Como $g(2)=-3<0$ y $g(4)=49>0$, existe un valor en el intervalo $(2,4)$ que anula g, es decir, la función del denominador de f y, por tanto, la función f no es continua en $[2,4]$ y no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

8. Consideramos la función $f(x)=x^3+x-5$ que es continua en $[1,2]$ y, además, $f(1)=-3<0$, $f(2)=5>0$.

Por el teorema de Bolzano se sabe que $\exists c\in(1,2)\,/$ $f(c)=0$ luego c es solución de la ecuación dada.

Si se calculan los valores $f(1{,}2)$, $f(1{,}4)$, $f(1{,}6)$, $f(1{,}8)$ se puede determinar el intervalo en el que se encuentra la solución:

$f(1{,}4)=-0{,}856<0$; $f(1{,}6)=0{,}696>0\Rightarrow$

$\Rightarrow c\in(1{,}4;\ 1{,}6)$

9. La función es continua y positiva en R y, además, como su derivada $f'(x)=\dfrac{5e^x}{(1+e^x)^2}>0\ \forall x$, f es monótona creciente.

Se calculan $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5e^x}{1+e^x}=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5e^x}{1+e^x}=5$, por lo que el ínfimo es 0 y el supremo 5 y no son alcanzables, es decir, no hay ni máximo ni mínimo absolutos.

10. La derivada $f'(x)=\dfrac{e^x(e^{2x}+2e^x-1)}{(1+e^x)^2}$ solo se anula para $x=\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\approx -0{,}9$.

Se hallan $f(3)\approx 0{,}9549$, $f\left(\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)\approx 0{,}82$ y $f(1)\approx 2{,}25$.

Luego en el intervalo $[-3,1]$, f alcanza el mínimo en $x=\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)$ y el máximo en $x=1$.

10 Derivadas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Calcular la derivada de una función en un punto mediante su definición como límite.	**1.** Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados. a) $f(x) = 2x^2 + x + 3$ en $x = 1$ b) $f(x) = \frac{3}{x+5}$ en $x = -2$ **2.** El espacio, en metros, recorrido por un móvil viene expresado por la función $s(t) = 4t^2 - t$, t en segundos. a) Halla la velocidad media del móvil en los dos primeros segundos de recorrido. b) Obtén la velocidad instantánea para $t = 1$ s.
B. Determinar la pendiente de la tangente a una curva en un punto y calcular su ecuación y la de la recta normal a la función en dicho punto.	**3.** Obtén la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 2$. ¿Cuál es la ecuación de la tangente? ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje X? ¿Cuál es la ecuación de la normal? **4.** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$. ¿En qué punto corta esta recta al eje X?
C. Determinar, mediante la aplicación de las reglas de derivar, la derivada de funciones que se obtienen operando con funciones elementales.	**5.** Dadas $f(x)$ y $g(x)$ de las que se sabe $f(-2) = 3$, $g(-2) = -1$, $g'(-2) = 7$, $g'(3) = -5$, $f'(3) = 0$, $f'(-2) = 6$ y $f'(-1) = -3$, calcula: a) $(f + g)'(3)$ b) $(f \cdot g)'(-2)$ c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(-2)$ d) $(f \circ g)'(-2)$ e) $(g \circ f)'(-2)$
D. Derivar funciones que sean composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.	**6.** Si $f(x) = 1 + 2x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2 + 1$, calcula: a) $(g \circ h)'(2)$ b) $(h \circ g \circ f)'(1)$ c) $(f \circ h \circ g)'(4)$ d) $(g \circ f \circ h)'(x)$ **7.** Halla la función derivada de las funciones: a) $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^5$ b) $g(x) = \operatorname{sen}^2(\ln(2x + 1))$ c) $h(x) = \sqrt{\cos(1 - 3x)}$
E. Aplicar la regla de la cadena para obtener la derivada de la función inversa.	**8.** Calcula la derivada de la función inversa de $f(x) = x^3 + x - 11$ en $x = -1$.
F. Aplicar la derivación logarítmica y la implícita.	**9.** Halla la derivada de las funciones siguientes aplicando la derivación logarítmica. a) $f(x) = \sqrt[x]{2x+1}$ b) $g(x) = (\operatorname{sen} x)^{2x+1}$ c) $h(x) = 3^{5x^2}$ **10.** La curva de ecuación $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$ pasa por el punto $(2, -1)$. Calcula la derivada de la función y en ese punto. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a la curva en ese punto?
G. Hallar el valor de la diferencial de una función en un punto para un incremento conocido de la variable.	**11.** Calcula el diferencial de la función $y = f(x) = \sqrt{3x - 2}$ en $x = 9$ para un incremento de la variable $\Delta x = 0{,}2$. **12.** Teniendo en cuenta que $\sqrt[3]{343} = 7$, calcula, aproximando mediante la diferencial, el valor de $\sqrt[3]{345}$.
H. Obtener diferenciales de funciones y en especial de funciones que expresen magnitudes físicas.	**13.** Halla la función diferencial de las siguientes funciones: a) $y = 5x^2 - 7x + 4$ b) $s = \operatorname{sen} t$ c) $u = \ln v$ **14.** La función que determina el volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Calcula dV e interpreta el resultado obtenido.

Soluciones

1. a) $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x + 3 - 6}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(2x+3)}{x-1} = 5$

b) $f'(-2) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\dfrac{3}{x+5} - 1}{x + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-(x+2)}{(x+5)(x+2)} = -\dfrac{1}{3}$

2. a) $v_m = \dfrac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \dfrac{14}{2} = 7$ m/s

b) $v_i = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(1+h) - s(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(4h + 7) = 7$ m/s

3. $m = f'(-2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left[2(2+h)^2 - 3(2+h)\right] - (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2)}{h} = 5$

$y - f(2) = m(x - 2) \Rightarrow y - 2 = 5(x - 2)$

$\operatorname{tg} \alpha = 5 \Rightarrow \operatorname{arctg}(5) \approx 78° \, 41' \, 24''$

4. $f(0) = 1$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$, $f'(0) = -1$; la ecuación de la recta tangente es $y - 1 = -1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -x + 1$.

Punto de corte: $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P(1, 0)$

5. a) $(f + g)'(3) = f'(3) + g'(3) = 0 + (-5) = -5$

b) $(f \cdot g)'(-2) = f'(-2) \cdot g(-2) + f(-2) \cdot g'(-2) =$
$= 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 = -6 + 21 = 15$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(-2) = \dfrac{f'(-2) \cdot g(-2) - f(-2) \cdot g'(-2)}{(g(-2))^2} =$

$= \dfrac{6 \cdot (-1) - 3 \cdot 7}{(-1)^2} = \dfrac{-6 - 21}{1} = -7$

d) $(f \circ g)'(-2) = f'(g(-2)) \cdot g'(-2) = f'(-1) \cdot g'(-2) =$
$= (-3) \cdot 7 = -21$

e) $(g \circ f)'(-2) = g'(f(-2)) \cdot f'(-2) = g'(3) \cdot f'(-2) =$
$= (-5) \cdot 6 = -30$

6. $f'(x) = 2 \qquad g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \qquad h'(x) = 2x$

a) $(g \circ h)'(2) = g'(h(2)) \cdot h'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot 4 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b) $(h \circ g \circ f)'(1) = h'(g(f(1))) \cdot g'(f(1)) \cdot f'(1) =$

$= 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 2 = 2$

c) $(f \circ h \circ g)'(4) = f'(h(g(4))) \cdot h'(g(4)) \cdot g'(4) =$

$= 2 \cdot 2\sqrt{4} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = 2$

d) $(g \circ f \circ h)'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 + 2(x^2 + 1)}} \cdot 2 \cdot 2x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 3}}$

7. a) $f'(x) = 5(x^2 - 3x + 5)^4 \cdot (2x - 3)$

b) $g'(x) = 2\operatorname{sen}(\ln(2x + 1)) \cdot \cos(\ln(2x + 1)) \cdot \dfrac{2}{2x + 1}$

c) $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos(1 - 3x)}} \cdot (-\operatorname{sen}(1 - 3x)) \cdot (-3) =$

$= \dfrac{3\operatorname{sen}(1 - 3x)}{2\sqrt{\cos(1 - 3x)}}$

8. $f(c) = -1 \Rightarrow c^3 + c - 11 = -1 \Rightarrow c = 2$

$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(2) = 13$

$(f \circ f^{-1})(x) = x$. Derivando la función compuesta:

$f'(f^{-1})(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (f^{-1})(-1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(-1))} = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{13}$

9. a) $\ln f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \ln(2x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\dfrac{1}{x^2} \cdot \ln(2x + 1) + \dfrac{1}{x(2x + 1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[x]{2x + 1} \cdot \left(-\dfrac{\ln(2x + 1)}{x^2} + \dfrac{1}{x(2x + 1)}\right)$

b) $\ln(g(x)) = (2x + 1) \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)} = 2\ln(\operatorname{sen} x) + (2x + 1)\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) = (\operatorname{sen} x)^{2x+1} \cdot (2 \ln(\operatorname{sen} x) + (2x + 1)\operatorname{cotg} x)$

c) $\ln(h(x)) = 5x^2 \ln 3 \Rightarrow \dfrac{h'(x)}{h(x)} = (10 \ln 3)x \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(x) = 3^{5x^2}(10 \ln 3)x$

10. $2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-2x - 3y}{3x + 2y}$

$f'(2, -1) = \dfrac{-4 + 3}{6 - 2} = -\dfrac{1}{4}$; $y + 1 = -\dfrac{1}{4}(x - 2)$

11. $dy = \dfrac{3}{2\sqrt{3x - 2}}dx \Rightarrow dy(x = 9) = \dfrac{3}{2 \cdot 5} \cdot 0{,}2 = 0{,}06$.

12. $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$

$\sqrt[3]{345} = \sqrt[3]{343} + \Delta y \approx 7 + dy =$

$= 7 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{343^2}} \cdot 2 \approx 7{,}0136$

13. a) $dy = (10x - 7)dx$ b) $ds = \cos t \, dt$ c) $du = \dfrac{1}{v}dv$

14. $dV = 4\pi r^2 dr$. Representa el volumen de una "superficie" esférica de radio r y espesor dr.

11 Funciones derivables

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Obtener correctamente las derivadas laterales de una función en un punto, en especial en las funciones con valor absoluto o definidas a trozos.	**1.** Calcula las derivadas laterales de la función $f(x)=\begin{cases} 5x+2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ x^2+3 & \text{si } x>2 \end{cases}$ en $x=2$. **2.** Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = \left\lvert \lvert x^2 - 4\rvert + 3x \right\rvert$ en los siguientes puntos: a) $x = -2$ b) $x = -1$ c) $x = 2$ d) $x = -4$ e) $x = 0$
B. Determinar el valor de ciertos parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.	**3.** Determina el valor de los parámetros a y b para que sea continua y derivable en todo R la función $f(x) = \begin{cases} ax^3 - bx^2 & \text{si } x < 1 \\ 1 - 2ax & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.
C. Conocer los teoremas de Rolle y del valor medio y aplicarlos a ejemplos concretos de funciones.	**4.** Halla los valores de a y de b para que la función $f(x)=\begin{cases} bx - x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si } x>2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, 4]$ y determina el valor que verifica la tesis del teorema. **5.** Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + m & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$ a) Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4, 2]$. b) Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.
D. Resolver límites de funciones en los que aparezca cualquiera de las indeterminaciones.	**6.** Calcula: a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(\dfrac{\sqrt{3} - 2\,\text{sen}\,x}{1 - 4\cos^2 x} \right)$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{6x-2}{x^2-1} \right)$ c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\text{tg}(1-x)} \right)$
E. Determinar los extremos relativos de una función y los intervalos de monotonía.	**7.** Determina los extremos relativos, los intervalos de monotonía, la curvatura y los puntos de inflexión de las funciones: a) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$ b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 - 2x}{1 + 2x}\right)$
F. Determinar los puntos de inflexión de una función y los intervalos de curvatura.	
G. Resolver problemas de optimización relacionados con la geometría.	**8.** Se tiene un triángulo rectángulo de hipotenusa 12 cm que, al girar alrededor de uno de sus catetos, genera un cono. Determina las dimensiones del triángulo que genera el cono de volumen máximo y el valor de dicho volumen. **9.** Se quiere construir un depósito de 8 m^3 de capacidad con forma de prisma de base cuadrada y sin tapa. El material que se utiliza para la base cuesta 15 € el m^2 mientras que el que se utiliza para las paredes cuesta 12 € el m^2. Determina las dimensiones del depósito que hay que hacer para que su coste de construcción sea mínimo.
H. Plantear y resolver problemas de optimización relacionados con las ciencias experimentales y sociales.	**10.** El valor de una cartera de acciones a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en miles de euros) viene dado por la expresión (x en años): $F(x) = (x - 2)^2 \cdot (1 - 2x) + 252x + 116$ con $0 \leqslant x \leqslant 10$ a) Determina los intervalos de tiempo en los que el valor de la cartera creció y aquellos en los que decreció. b) Si la cartera se vende a los 10 años, ¿cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto se deja de ganar por no haberlo retirado en el momento óptimo?

Soluciones

1. $f'(2^-) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5(2+h)+2-12}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h}{h} = 5$

$f'(2^+) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2+3-12}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+4h-5}{h}$. No es derivable por la derecha.

2. $$f(x)=\begin{cases} x^2+3x-4 & \text{si } x<-4 \\ -x^2-3x+4 & \text{si } -4\leqslant x<-2 \\ x^2-3x-4 & \text{si } -2\leqslant x<-1 \\ -x^2+3x+4 & \text{si } -1\leqslant x<2 \\ x^2+3x-4 & \text{si } x\geqslant 2 \end{cases} \quad f'(x)=\begin{cases} 2x+3 \\ -2x-3 \\ 2x-3 \\ -2x+3 \\ 2x+3 \end{cases}$$

Al ser continua f en los puntos pedidos, las derivadas laterales se pueden calcular a partir de la función f' que, en principio, no está definida para $x = -4$, $x = -2$, $x = -1$ y $x = 2$.

a) $f'(-2^-)=1$, $f'(-2^+)=-7$ d) $f'(-4^-)=-5$, $f'(-4^+)=5$

b) $f'(-1^-)=-5$, $f'(-1^+)=5$ e) $f'(0) = 3$

c) $f'(2^-) = -1$, $f'(2^+) = 7$

3. Para $x \neq 1$, f es continua y derivable, ya que está definida por polinomios. Para $x = 1$ resulta:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(ax^3 - bx^2) = a - b$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(1 - 2ax) = 1 - 2a$

Y de aquí se deduce: $a - b = 1 - 2a \Rightarrow \boxed{b = 3a - 1}$.

Con esta condición, f es continua en $x = 1$ y, por tanto, sus derivadas laterales en ese punto se pueden calcular como los límites de la función f'.

$$f'(x)=\begin{cases} 3ax^2-2bx & \text{si } x<1 \\ -2a & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-)=3a-2b \\ f(1^+)=-2a \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3a - 2b = -2a \Rightarrow \boxed{2b = 5a}$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones recuadradas se llega a la solución buscada: $a = 2$, $b = 5$.

4. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2b - 4 = 2 \Rightarrow b = 3$

$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow b - 4 = -1 \Rightarrow b = 3$

$f(a) = f(4) \Rightarrow 3a - a^2 = 1,\ a < 2 \Rightarrow a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38$

El teorema afirma que $\exists c \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ 4\right]$ que verifica $f'(c) = 0$ y como $-\dfrac{4}{x^2} \neq 0\ \forall x$, la derivada tiene que anularse para algún valor del intervalo

$\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ 2\right]$. $3 - 2c = 0 \Rightarrow c = \dfrac{3}{2} \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ 2\right]$

5. a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \Rightarrow 4 - 2n = -8 + m \Rightarrow$

$\Rightarrow m + 2n = 12$

$f'(-2^-)=f'(-2^+) \Rightarrow -4+n=12 \Rightarrow n=16 \Rightarrow m=-20$

b) $\exists c \in (-4, 2) / \dfrac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)} = \dfrac{-12-(-48)}{6} = 6 = f'(c)$

$2c + 16 = 6 \Rightarrow c = -5 \notin (-4, -2)$

$3c^2 = 6 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2} \in (-2, 2)$

6. a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}-2\,\mathrm{sen}\,x}{1-4\cos^2 x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{-2\cos x}{8\,\mathrm{sen}\,x\cos x}\right) = \dfrac{-1}{2\sqrt{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{6x-2}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x+1} = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\mathrm{tg}(1-x)}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{2x+1}{x^2+x-1}}{-\left(1+\mathrm{tg}^2(1-x)\right)} = -3$

7. a) $D(f) = \mathrm{R} - \{0\}$; $f'(x) = \dfrac{3(x^4-1)}{x^4}$ solo se anula para $x = \pm 1$. Como $f''(x) = \dfrac{12}{x^5} \Rightarrow f''(-1) < 0$, $f''(1) > 0$.

Máximo relativo en el punto $(-1, -4)$ y mínimo en $(1, 4)$. f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

f cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y hacia arriba en $(0, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

b) $D(k) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$; $k'(x) = \dfrac{-4}{1-4x^2}$; $k''(x) = \dfrac{-32x}{\left(1-4x^2\right)^2}$

No tiene máximos ni mínimos relativos.

Es siempre decreciente en su dominio.

Como $k''(x) > 0\ \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, en este intervalo es cóncava hacia arriba, y es cóncava hacia abajo si $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, ya que $k''(x) < 0$ en este intervalo.

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

8. Llamando x a la altura del cono, su volumen es:

$V = \dfrac{1}{3}\pi x\left(144 - x^2\right)$ con dominio $(0, 12)$.

$V' = \dfrac{1}{3}\pi\left(144 - 3x^2\right)$ solo se anula para $x = \sqrt{48}$. Y como $V(0) = 0$, $V(12) = 0$ y $V\left(\sqrt{48}\right) = 32\pi\sqrt{48}$ cm^3, resulta que este es el volumen máximo y las dimensiones del triángulo son: $4\sqrt{3}$, $4\sqrt{6}$, 12 cm.

9. Llamando x a la arista de la base, la altura es $\dfrac{8}{x^2}$ y el precio $P(x) = 15x^2 + 12\left(4x \cdot \dfrac{8}{x^2}\right) = 15x^2 + \dfrac{384}{x}$ con dominio $(0, +\infty)$. $P'(x) = 30x - \dfrac{384}{x^2}$ solo se anula para $x = \sqrt[3]{\dfrac{64}{5}}$ que corresponde al mínimo de la función. Las dimensiones son $x \approx 2{,}34$ m, $h \approx 1{,}46$ m

10. $F'(x) = -6(x + 5)(x - 8)$ que solo se anula para $x = 8$.

a) De 0 a 8 creció y de 8 a 10 decreció.

b) El mejor momento hubiera sido a los 8 años con un valor de $F(8) = 1\,592\,000$ €. Como $F(10) = 1\,420\,000$ €, ha dejado de ganar 172 000 €.

12 Representación de funciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Calcular el dominio de una función dada por su expresión algebraica, su gráfica o mediante un enunciado, así como su continuidad.	**1.** Determina el dominio y la continuidad de las funciones: a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2}$ b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{-x-2}{x-3}}$ c) $k(x) = \ln(\text{sen}(2x))$
B. Calcular los puntos de corte con los ejes y el signo de una función.	**2.** Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones: a) $f(x) = 1 + \text{sen}\, x$ c) $h(x) = 1 - (\ln(3 + x))$ b) $g(x) = \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x}$ d) $k(x) = \dfrac{e^x}{x}$
C. Estudiar las simetrías y la posible periodicidad de una función.	**3.** Determina la periodicidad de las funciones: a) $f(x) = \text{sen}^2\, x$ b) $g(x) = 4\cos\left(\dfrac{4\pi x}{3}\right)$ **4.** Estudia las simetrías de las siguientes funciones: a) $f(x) = \ln\lvert x^2 - 5\rvert$ b) $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ c) $h(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$
D. Calcular la tendencia de una función en el infinito y en las proximidades de puntos aislados en los que no está definida.	**5.** Estudia el comportamiento de las funciones en el infinito y en los puntos de discontinuidad. a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}$ b) $g(x) = \ln\left\lvert\dfrac{x-5}{x+2}\right\rvert$
E. Calcular las asíntotas de una función.	**6.** Halla las asíntotas de las funciones: a) $g(x) = \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x}$ b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
F. Determinar la monotonía y extremos relativos de una función.	**7.** La función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 4$ tiene un mínimo relativo en el punto (2, 0). Determina los coeficientes *b* y *c* y estudia su monotonía.
G. Determinar la curvatura y los puntos de inflexión.	**8.** Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones: a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ b) $g(x) = \text{sen}\, x - \cos x$
H. Representar gráficamente funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, tras hacer un estudio completo de sus características.	**9.** Efectúa la representación gráfica de las siguientes funciones tras realizar un estudio de las características más importantes de cada una de ellas. a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ c) $h(x) = \ln\lvert x^2 - 5\rvert$ e) $n(x) = 2\,\text{sen}\, x - \cos 2x$ b) $g(x) = \dfrac{3 + 2x^3}{1 - x^2}$ d) $m(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ f) $s(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$
I. Representar las gráficas de las funciones: $-f(x)$, $f(x) + k$, $f(x + c)$, $a \cdot f(x)$, $f(k \cdot x)$, $\lvert f(x)\rvert$, $f(\lvert x\rvert)$ cuando se conoce la gráfica de la función $f(x)$.	**10.** Teniendo en cuenta la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ representa las siguientes funciones en el mismo intervalo. a) $f(x) = 2\cos x$ c) $f(x) = 3 + \cos x$ e) $f(x) = 1 - \cos x$ b) $f(x) = \cos 2x$ d) $f(x) = \cos(x - \pi)$ f) $f(x) = \lvert 1 - 2\cos x\rvert$

Soluciones

1. a) $D(f) = R - \{0, 3\}$

b) $D(g) = [-2, 3)$

c) $D(k) = \{x \in R \ / \ \text{sen}(2x) > 0\}$

$2x \in \{\text{I, II cuadrantes}\} \Rightarrow D = \left(0 + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

2. a) $f(x) = 1 + \text{sen}\, x \begin{cases} Y\text{: } (0, 1) \\ X\text{: } \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, 0\right) \end{cases}$

f es siempre positiva excepto en los puntos de corte con el eje X.

b) $g(x) = \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} \begin{cases} Y\text{: } (0, 3) \\ X\text{: No tiene} \end{cases}$

$g(x) < 0$ si $x > \ln 2$; $g(x) > 0$ si $x < \ln 2$.

c) $h(x) = 1 - (\ln(3 + x)) \begin{cases} Y\text{: } (0, 1 - \ln 3) \\ X\text{: } (e - 3, 0) \end{cases}$

$h(x) < 0$ si $x > e - 3$; $h(x) > 0$ si $x < e - 3$.

d) $k(x) = \dfrac{e^x}{x}$. No corta a ninguno.

$k(x) < 0$ si $x < 0$; $k(x) > 0$ si $x > 0$.

3. a) $f(x) = \text{sen}^2\, x$. Período: $T = \pi$, porque
$\text{sen}^2(x + \pi) = \text{sen}(x + \pi) \cdot \text{sen}(x + \pi) =$
$= (-\text{sen}\, x) \cdot (-\text{sen}\, x) = \text{sen}^2\, x$

b) $g(x) = 4\cos\left(\dfrac{4\pi x}{3}\right)$, $T = 2\pi$: $\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$

4. a) $f(x) = \ln|x^2 - 5|$. Es una función par: $f(-x) = f(x)$

b) $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $g(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -g(x)$.

Es una función impar.

c) $h(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$. Es impar, ya que $h(-x) = -h(x)$.

5. a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{4}{5}$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \ln 1 = 0$; $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = -\infty$

6. a) Vertical: $x = \ln 2$, porque $\lim\limits_{x \to \ln 2} \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} = \infty$

Horizontales: $y = \pm 1$, porque $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} = \dfrac{2}{2} = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + e^x}{2 - e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{-x} + 1}{2e^{-x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

b) Oblicuas: $y = \pm x$, porque $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} = 1$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x}\right) = 0$$

7. $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 4$; $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow 4b + 2c = -12 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 4b + c = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$f'(x) > 0 \ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Creciente.

$f'(x) < 0 \ \forall x \in (0, 2)$. Decreciente.

En $x = 0$ hay un máximo relativo.

8. a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$

Cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.
Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$.
Punto de inflexión para $x = 0$.

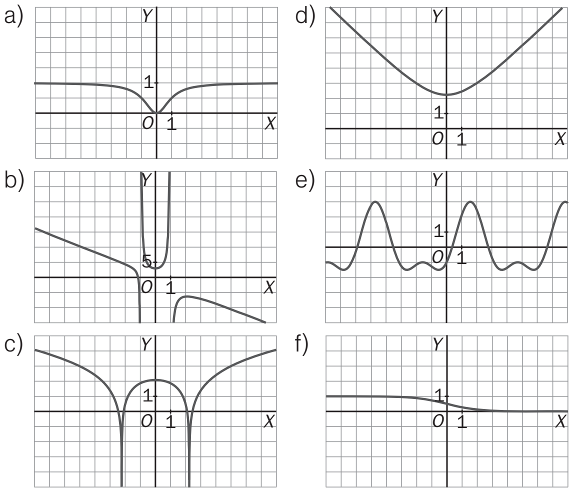
b) $g(x) = \text{sen}\, x - \cos x$; $g''(x) = -\text{sen}\, x + \cos x$
Período: $T = 2\pi$, se estudia $g(x)$ en $[0, 2\pi)$.

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ o $x = \dfrac{5\pi}{4}$, en los que hay inflexión.

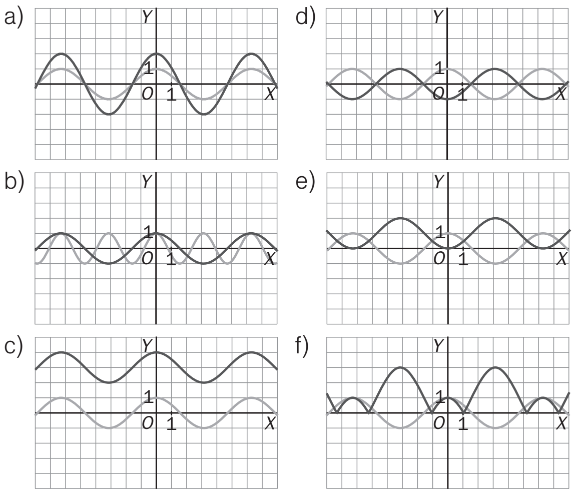
Cóncava hacia arriba en $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4}, 0\right)$.

Cóncava hacia abajo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

9.



10.



13 Cálculo de primitivas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Hallar una función de la que se conoce su derivada y un punto de su gráfica.	**1.** La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x) = 6x^2 - 4x + 5$ y se sabe que la función pasa por el punto $P(2, 25)$. Halla la función y calcula $f(0)$. **2.** La función $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $M(-3, 17)$ y su derivada segunda es $f''(x) = 6x + 6$. Determina de qué función se trata y halla las coordenadas del punto de inflexión y del mínimo relativo de la misma. ¿En qué punto corta la gráfica de la función al eje de ordenadas?
B. Resolver problemas elementales de cinemática por la aplicación del cálculo integral.	**3.** Las expresiones escalares de la velocidad y de la aceleración instantánea en un movimiento rectilíneo son $v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$, $a = \frac{dv}{dt} = v'(t) = s''(t)$. En un determinado movimiento se sabe que la aceleración tiene el valor constante $a = -10$ m/s^2 y que a los 2 s el móvil se encuentra en la posición $s(2) = 48$ m y lleva una velocidad de 12 m s^{-1}. Determina: a) La expresión de la velocidad en cualquier instante. b) La velocidad inicial. c) La expresión de la posición en cualquier instante. d) La posición inicial. e) La posición y la velocidad a los 4 segundos.
C. Resolver por partes las integrales de funciones del tipo: $\ln x$, $\text{arcsen}\, x$, $\text{arctg}\, x$, $P(x) \cdot e^x$, $P(x) \cdot \text{sen}\, x$, etc.	**4.** Resuelve, aplicando el método de integración por partes, las integrales: a) $\int (\ln x)^2\, dx$ b) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ **5.** Resuelve las integrales: a) $\int 2x \cdot \text{arctg} x \cdot dx$ b) $\int (3x + 1) \cdot e^x \cdot dx$
D. Resolver, por reiteración del método, integrales de funciones como $\text{sen}\,(ax) \cdot e^{bx}$.	**6.** Halla, utilizando el método de integración por partes, las integrales: a) $\int e^{2x+1} \cdot \cos(x - 2) \cdot dx$ b) $\int \text{sen}^4 x\, dx$
E. Calcular integrales de funciones racionales con raíces reales, simples y múltiples, en el denominador.	**7.** Halla, mediante descomposición simple, la integral $\int \left(\frac{x^2 - 3x + 5}{x} \right) dx$ **8.** Resuelve las integrales: a) $\int \frac{5}{x^2 - 3x - 4}\, dx$ b) $\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 6}{x^3 - 3x^2}\, dx$
F. Efectuar la descomposición y las integrales de funciones racionales con raíces complejas simples en el denominador.	**9.** Resuelve las integrales con raíces complejas en el denominador: a) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 10}\, dx$ b) $\int \frac{5}{x^4 - 1}\, dx$
G. Efectuar transformaciones sencillas en la función integrando para transformar las integrales en inmediatas.	**10.** Transforma las funciones para convertirlas en integrales inmediatas. a) $\int \frac{1}{1 - \cos x}\, dx$ b) $\int \frac{x - 4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$
H. Resolver integrales, especialmente trigonométricas, por cambio de variable.	**11.** Integra: a) $\int \text{sen}^3 x \cdot dx$ b) $\int \frac{1 + \text{sen}^2 x}{\cos^4 x}\, dx$

Soluciones

1. La función buscada es $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + K$

Para determinar la constante K, se exige que $f(2) = 25$, es decir, $16 - 8 + 10 + K = 25 \Rightarrow K = 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 7 \Rightarrow f(0) = 7$.

2. $f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + C$. Como hay un máximo relativo en $x = -3$, entonces $f'(-3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = -9$ y la derivada es $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + K$ y como $f(-3) = 17 \Rightarrow K = -10$

Por tanto, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$.

Inflexión: $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow I(-1,\ 1)$

Mínimo:

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \Rightarrow \text{máximo } M(-3,\ 17) \\ x_2 = 1 \Rightarrow \text{mínimo } m(1,\ -15) \end{cases}$$

Punto de corte con Y: $P(0,\ -10)$

3. $v = \int a\,dt = \int -10\,dt = -10t + C,\ v(2) = 12 \Rightarrow C = 32$

$$s = \int v\,dt = \int (-10t + 32)\,dt = -5t^2 + 32t + K$$

$s(2) = 48 \Rightarrow -20 + 64 + K = 48 \Rightarrow K = 4$

a) $v(t) = -10t + 32\ \text{m s}^{-1}$ d) $s_0 = s(0) = 4\ \text{m}$

b) $v_0 = v(0) = 32\ \text{m s}^{-1}$ e) $s(4) = 52\ \text{m},\ v(4) = -8\ \text{m s}^{-1}$

c) $s(t) = -5t^2 + 32t + 4\ \text{m}$

Se puede interpretar como un lanzamiento vertical desde 4 m de altura con velocidad inicial 32 m s^{-1}. A los 4 s el móvil ya está bajando.

4. a) Tomando $\begin{cases} u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = \dfrac{2}{x}\ln x\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = x(\ln x)^2 + 2x(1 - \ln x) + k$$

Ya que la integral de $\ln x$ se hace por partes:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x = -x(1 - \ln x)$$

b) Tomando $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \text{tg}\,x \end{cases}$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\,\text{tg}\,x - \int \text{tg}\,x\,dx = x\,\text{tg}\,x + \ln|\cos x| + K$$

5. a) Tomando $\begin{cases} u = \text{arctg}x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x^2 + 1} \\ dv = 2x\,dx \Rightarrow v = x^2 \end{cases}$

$$\int 2x \cdot \text{arctg}\,x \cdot dx = x^2\text{arctg}\,x - \int \frac{x^2 + (1-1)}{x^2 + 1}\,dx =$$

$$= x^2\text{arctg}x - \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2 + 1}\,dx = (x^2 + 1)\text{arctg}x - x + K$$

b) $\int (3x + 1) \cdot e^x \cdot dx = (3x + 1) \cdot e^x - 3\int e^x\,dx =$

$= (3x + 1) \cdot e^x - 3e^x + C = (3x - 2) \cdot e^x + C$

6. a) $I = \int e^{2x+1} \cdot \cos(x - 2) \cdot dx =$

$$= e^{2x+1}\text{sen}(x - 2) + 2e^{2x+1}\cos(x - 2) - 4I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{5}e^{2x+1}(\text{sen}(x - 2) + 2\cos(x - 2)) + K$$

b) Tomando $\begin{cases} u = \text{sen}^3 x \Rightarrow du = 3\text{sen}^2 x \cos x\,dx \\ dv = \text{sen}x\,dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$\int \text{sen}^4 x\,dx = -\text{sen}^3 x \cos x + 3\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$$

$$I = -\text{sen}^3 x \cos x + 3\int \text{sen}^2 x\,dx - 3I \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{4}\left(-\text{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{2}(x - \text{sen}\,x \cos x)\right) + K$$

7. $$\int \left(\frac{x^2 - 3x + 5}{x}\right) dx = \int \left(x - 3 + \frac{5}{x}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\ln|x| + K$$

8. a) $\int \dfrac{5}{x^2 - 3x - 4}\,dx = -\ln|x + 1| + \ln|x - 4| + C$, ya que

$$\frac{5}{x^2 - 3x - 4} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 4} \Rightarrow A(x - 4) + B(x + 1) = 5$$

de donde $A = -1$ y $B = 1$.

b) $\int \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 6}{x^3 - 3x^2}\,dx$ se descompone:

$$\int \left[(x + 1) + \frac{3}{x - 3} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + 3\ln|x - 3| + \ln|x| + \frac{2}{x} + K$$

9. a) $$\int \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 6 - 4}{x^2 + 6x + 10}\,dx \overset{\boxed{y = x + 3}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 10}\,dx - \int \frac{2dy}{y^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 6x + 10) - 2\text{arctg}(x + 3) + K$$

b) $$\int \frac{5}{x^4 - 1}\,dx = \int \left[\frac{\frac{5}{4}}{x - 1} + \frac{-\frac{5}{4}}{x + 1} + \frac{-\frac{5}{2}}{x^2 + 1}\right] dx =$$

$$= \frac{5}{4}\ln|x - 1| - \frac{5}{4}\ln|x + 1| - \frac{5}{2}\text{arctg}\,x + K$$

10. a) $$\int \frac{1}{1 - \cos x}\,dx = \int \frac{1 + \cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\text{sen}^2 x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx = -\text{cotg}\,x - \text{cosec}\,x + K$$

b) $$\int \frac{x - 4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{6}}\right) dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{24}{7}x^{\frac{7}{6}} + K$$

11. a) $$\int \text{sen}^3 x \cdot dx = \int (1 - \cos^2 x)\,\text{sen}\,x\,dx \overset{\boxed{t = \cos x}}{=}$$

$$= \int (1 - t^2) \cdot (-dt) = -t + \frac{1}{3}t^3 + K = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + K$$

b) $$\int \frac{1 + \text{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right) \frac{1}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int (1 + \text{tg}^2 x + \text{tg}^2 x) \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \overset{\boxed{t = \text{tg}\,x}}{=}$$

$$= \int (1 + 2t^2)\,dt = t + \frac{2}{3}t^3 + K = \text{tg}\,x + \frac{2}{3}\text{tg}^3 x + K$$

14 Integral definida

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Hallar la suma de Riemann en un intervalo $[a, b]$ de una función lineal.

1. Obtén las sumas de Riemann para la función $\frac{1}{2}x$ en el intervalo [2, 6] tomando los extremos inferiores de los intervalos (suma inferior) y tomando los extremos superiores (suma superior). Halla el límite de esas sumas cuando $n \to \infty$.

B. Obtener sumas de Riemann de otras funciones y calcular su límite cuando $n \to \infty$.

2. La siguiente tabla corresponde a una función continua definida en el intervalo [3, 7]. Calcula $\sum_{1}^{8} f(x_i) \cdot c_i$.

x_i	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
y_i	1	1,8	2	2,4	2,5	3	3,2	3,5

C. Resolver integrales definidas de funciones de las que se obtenga una primitiva de forma inmediata.

3. Calcula las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow.

a) $\int_1^5 (2x + 1)\,dx$ b) $\int_{-1}^3 \frac{2}{x+2}\,dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ d) $\int_{-1}^1 e^{-x}\,dx$

D. Resolver integrales definidas en las que haya que utilizar la propiedad de aditividad del intervalo.

4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{k}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $[-2, e]$.

b) Halla $\int_{-2}^{e} f(x)\,dx$.

E. Derivar funciones integrales de la forma $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$.

5. Halla la función derivada de las funciones integrales:

a) $F(x) = \int_2^x (t^2 + 4t + 5)\,dt$ b) $G(x) = \int_x^5 \ln t\,dt$ c) $H(x) = \int_{2x}^{x^2+3} \sqrt{t}\,dt$

6. Halla el valor máximo y el mínimo de la función $F(x) = \int_0^x (t^2 - 4t + 3)\,dt$ en el intervalo [0, 5].

F. Calcular el área del recinto limitado por una curva y el eje de abscisas, o por dos curvas.

7. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ y el eje de abscisas.

8. Las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\, 2x$, $y = \cos x$ se cortan en infinitos puntos y delimitan distintos recintos. Calcula el área de dos recintos que tengan áreas diferentes.

G. Hallar el volumen de un cuerpo de revolución.

9. Calcula, mediante integración, el volumen del cuerpo de revolución que se genera al girar alrededor del eje mayor una elipse de semiejes a y b. ¿Cuál sería el volumen si la elipse girara alrededor del eje menor?

10. El recinto limitado por las funciones $f(x) = 2\sqrt[4]{x}$ y $g(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x - 7}$ y el eje de abscisas gira alrededor de este eje y genera un cuerpo de revolución. Representa el recinto y calcula el volumen del cuerpo.

H. Calcular longitudes de arcos.

11. Se considera el arco de la curva correspondiente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x - 1)^3}$ en el intervalo [1, 4]. ¿Qué longitud tiene?

12. Halla la longitud del arco de curva correspondiente a la gráfica de la función $y = e^x$ en el intervalo [0, ln 3].

I. Resolver, mediante integral definida, problemas relacionados con otras ciencias, en especial con la Física.

13. Un resorte elástico situado en un plano horizontal tiene un extremo fijo a una pared. Se tira del extremo libre hasta alargarlo 10 cm. Halla el trabajo que realiza el muelle cuando su extremo libre pasa desde los 10 cm hasta los 5 cm respecto de la posición de equilibrio. La constante elástica del muelle es $k = 2000$ N m^{-1}.

Soluciones

1. Se divide el intervalo [2, 6] en n intervalos iguales de amplitud $\frac{4}{n}$ mediante la partición:

$$\left\{2,\ 2+\frac{4}{n},\ 2+2\left(\frac{4}{n}\right),\ 2+3\left(\frac{4}{n}\right),\ ...,\ 2+(n-1)\left(\frac{4}{n}\right),\ 6\right\}$$

$$\sum_1^n f(x_i)\cdot c_i = \frac{4}{n}\left[1+1+\frac{2}{n}+1+\frac{4}{n}+...+1+\frac{2(n-1)}{n}\right]=$$

$$=\frac{4}{n}\left[(1+1+1+...+1)+\frac{2+4+6+...+2(n-1)}{n}\right]=$$

$$=\frac{4}{n}\left[n+\frac{\frac{2+2(n-1)}{2}(n-1)}{n}\right]=\frac{4}{n}(n+n-1)=\frac{8n-4}{n}$$

Con los extremos superiores es análogo y se obtiene $\frac{8n+4}{n}$. En ambos casos el límite es igual:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n-4}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+4}{n}\right)=8$$

2. Todos los intervalos tienen amplitud $c_i = 0{,}5$.

$$\sum_1^8 f(x_i)\cdot c_i = 0{,}5(1+1{,}8+...+3+3{,}2+3{,}5)=19{,}4$$

3. a) $\int_1^5 (2x+1)\,dx = [x^2+x]_1^5 = (25+5)-(1+1)=28$

b) $\int_{-1}^3 \frac{2}{x+2}\,dx = [2\ln|x+2|]_{-1}^3 = (2\ln 5 - 2\ln 1) = 2\ln 5$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen} 0 = 1$

d) $\int_{-1}^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_{-1}^1 = (-e^{-1})-(-e^1) = e-\frac{1}{e}$

4. a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 3 = \frac{k}{1} \Rightarrow k=3$

b) $\int_{-2}^e f(x)\,dx = \int_{-2}^1 (4-x^2)\,dx + \int_1^e \frac{3}{x}\,dx =$

$$=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^1 + [3\ln x]_1^e = 9+3=12$$

5. a) $F'(x) = x^2+4x+5$

b) $G(x) = \int_x^5 \ln t\,dt = -\int_5^x \ln t\,dt \Rightarrow G'(x) = -\ln x$

c) $H(x) = \int_{2x}^{x^2+3} \sqrt{t}\,dt = \int_{2x}^0 \sqrt{t}\,dt + \int_0^{x^2+3}\sqrt{t}\,dt \quad =$

$$=-\int_0^{2x}\sqrt{t}\,dt+\int_0^{x^2+3}\sqrt{t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H'(x) = 2\sqrt{2x}+2x\sqrt{x^2+3}$$

6. $F'(x) = x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$. Se anula para $x=1$ y para $x=3$.

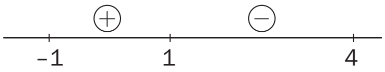
Se halla $F(0)=0$, $F(1)=\int_0^1 (t^2-4t+3)\,dt = \frac{4}{3}$,

$F(3) = \int_0^3 (t^2-4t+3)\,dt = 0$, $F(5) = \frac{20}{3}$

Máximo: $\frac{20}{3}$; mínimo: 0.

7. Raíces: $0 = x^3-4x^2-x+4 \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=4\end{cases}$

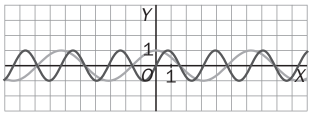
Signo:



$$S=\int_{-1}^1 (x^3-4x^2-x+4)\,dx+\int_1^4 (-x^3+4x^2+x-4)\,dx=$$

$$=\frac{253}{12}$$

8. Puntos de intersección:



$$\operatorname{sen} 2x = \cos x \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{\pi}{2}$$

$$S_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \operatorname{sen} 2x)\,dx = \left[\operatorname{sen} x+\frac{\cos 2x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9}{4}$$

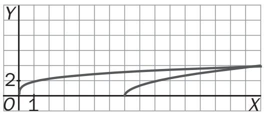
$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} 2x - \cos x)\,dx = \left[-\operatorname{sen} x-\frac{\cos 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

$$V = 2\pi\int_0^a y^2\,dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

$$V_2 = 2\pi\int_0^b x^2\,dy = 2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b (b^2-y^2)\,dy = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

10. Punto de corte (16, 4).



$$V = \pi\left(\int_0^{16} 4\sqrt{x}\,dx - \int_7^{16}\frac{16}{9}(x-7)\,dx\right) = \frac{296}{3}\pi$$

11. $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x-1}$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}dx = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{14}{3}\text{ u}$$

12. $y = e^x \Rightarrow y' = e^x \qquad L = \int_0^{\ln 3}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

Con el cambio de variable:

$$1+e^{2x} = t^2 \Rightarrow dx = \frac{t}{t^2-1}dt,\ \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\ln 3 \Rightarrow t=\sqrt{10}\end{cases}$$

$$L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}}\frac{t^2}{t^2-1}dt = \left[t+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} =$$

$$=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right]$$

13. $dW = F\cdot dx \Rightarrow W_{1\to 2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\cdot dx$

$$W = \int_{0{,}10}^{0{,}05}(-2000x)\,dx = [-1000x^2]_{0{,}10}^{0{,}05} = 7{,}5\text{ J}$$

Prueba final A

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 42$, calcula razonadamente el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & z & y \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

2. Discute el sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases}$ y resuélvelo solamente para el caso $a = 1$.

3. Se considera la ecuación matricial $AX - 2X = B$, donde A y B son las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Resuélvela despejando convenientemente la matriz X y sustituyendo posteriormente los datos.

4. Dada la superficie esférica de centro $C(1, 2, 0)$ y tangente al plano π: $2x + y - 2z + 20 = 0$, se pide hallar:

a) La ecuación general de la superficie esférica.

b) Las coordenadas del punto de tangencia.

c) El área de la superficie esférica y el volumen de la esfera que delimita.

5. Los planos π_1: $x - y - z + 1 = 0$, π_2: $x - 3y - 5z + 3 = 0$ se cortan en una recta r. Determina:

a) La ecuación paramétrica de dicha recta.

b) El ángulo que forman dichos planos.

c) La ecuación de otro plano que pasa por $P(3, -5, 3)$ y corta perpendicularmente a los planos dados.

6. Dado el punto $P(-3, 1, 0)$ y la recta r: $(1 + 3t, -1 + t, -2)$, determina:

a) La ecuación del plano perpendicular a la recta y que pasa por P.

b) La distancia del punto a la recta.

c) Las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r.

7. Halla los valores de a y de b para que la función $f(x) = \begin{cases} a + bx - x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ x^2 + ax + 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 4]$ y determina el valor o valores que verifican la tesis del teorema.

8. Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x - 1}{2 + x}$.

a) Estudia su monotonía y curvatura.

b) Representa gráficamente la función determinando además sus asíntotas.

9. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{5 + 3x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x + 4}{x^2 - 3x}\,dx$

10. Se considera el recinto acotado y limitado por la función $f(x) = e^{-x}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 1$.

a) Determina el área de dicho recinto.

b) Halla el volumen del cuerpo de revolución que se genera cuando el recinto anterior gira alrededor del eje de abscisas.

Soluciones

1. $\begin{vmatrix} x & z & y \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} x & z & y \\ 10 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= -5\begin{vmatrix} x & z & y \\ 10-9 & 6-9 & 9-9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 42 = 210$$

2. $|A| = 2(a + 3)(a - 1)$. Por tanto:

Si $a \neq -3$ y $a \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $a = -3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad (uniparamétrico). La solución se escribe $x = -2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -3\lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $AX - 2X = B \Rightarrow (A - 2I)X = B \Rightarrow X = (A - 2I)^{-1}B$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad |A - 2I| = -1.$$

Por tanto, resulta $(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -15 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -15 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -62 & -62 & -62 \\ -20 & -20 & -20 \\ -25 & -25 & -25 \end{pmatrix}$$

4. a) Radio $r = d(C, \pi) = \dfrac{|2 + 2 + 20|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 8$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 59$$

b) $T = \pi \cap r$ donde $r(C, \vec{n}_\pi)$: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$

$2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - 2(-2\lambda) + 20 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{8}{3} \Rightarrow T\left(\frac{19}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{16}{3}\right)$$

c) $A = 4\pi r^2 = 256\pi$, $\qquad V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2048}{3}\pi$

5. a) $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ x - 3y - 5z = -3 \end{cases} \Rightarrow r\colon \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \dfrac{1 + 3 + 5}{\sqrt{3}\sqrt{35}} \Rightarrow \alpha = 28^\circ\ 33'\ 39''$

c) Los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, normales a π_1 y π_2 respectivamente, son directores del plano π:

$$\pi = \begin{vmatrix} x - 3 & y + 5 & z - 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi\colon\ x + 2y - z = -10$$

6. a) π: $3x + y + d = 0$. Como $P \in \pi \Rightarrow d = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi$: $3x + y + 8 = 0$.

b) $M = \pi \cap r \Rightarrow 3(1 + 3t) + (-1 + t) + 8 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(-2, -2, -2)$

La distancia pedida será:

$$d(P,r) = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}\ \text{u}$$

c) M es el punto medio del segmento PP', donde $P'(x, y)$ es el simétrico de P buscado. Por tanto:

$$-2 = \frac{x - 3}{2} \Rightarrow x = -1;\ -2 = \frac{x + 1}{2} \Rightarrow y = -5,$$

$$-2 = \frac{z}{2} \Rightarrow z = -4 \Rightarrow P'(-1,\ -5,\ -4)$$

7. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow a + 2b - 4 = 2a + 12 \Rightarrow a = 2b - 16$

$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow a = 0$ y $b = 8$

La tesis del teorema dice que:

$$\exists c \in (-1, 4)\ /\ \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = f'(c) \Rightarrow \frac{33}{5} = f'(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c < 2, \quad 8 - 2c = \dfrac{33}{5} \Rightarrow c = \dfrac{7}{10} \\ c > 2, \quad 2c = \dfrac{33}{5} \Rightarrow c = \dfrac{33}{10} \end{cases}$$

8. $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

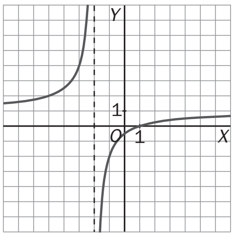
$$f'(x) = \frac{3}{(2 + x)^2} > 0;\quad f''(x) = \frac{-6}{(2 + x)^3} \neq 0,\ \forall x \in D.$$

No tiene extremos relativos ni puntos de inflexión. Creciente en todo D.

Si $x \in (-\infty, -2)$ es cóncava hacia arriba y en $(-2, +\infty)$ es cóncava hacia abajo.

Asíntota vertical: $x = -2$.

Asíntota horizontal: $y = 1$.



9. a) $\displaystyle\int \frac{6x}{2\sqrt{5 + 3x^2}}\, dx = \sqrt{5 + 3x^2} + C$

b) $\displaystyle\frac{7}{3}\int \frac{dx}{x - 3} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x} = \frac{7}{3}\ln|x - 3| - \frac{4}{3}\ln|x| + C$

10. a) $\displaystyle A = \int_0^1 e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}\ \text{u}^2$

b) $\displaystyle V = \pi\int_0^1 (e^{-x})^2\, dx = \pi\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\ \text{u}^3$

Prueba final B

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Se consideran las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Resuelve la ecuación matricial $AX = B$ por el método de la matriz inversa en aquellos casos en los que existe A^{-1}.

2. Discute según los valores del parámetro k y resuelve el sistema $\begin{cases} 6x + 4y + 2kz = 2 \\ kx + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 2k \end{cases}$.

3. Sin desarrollar los determinantes, demuestra la siguiente igualdad: $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$.

4. Se consideran las rectas: r: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$, s: $\begin{cases} 2x - z = -2 \\ 2y - mz = 6 \end{cases}$.

Halla el valor de m para el que las rectas r y s son paralelas.

Para el valor de m obtenido, determina la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

5. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta:

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

6. Cada una de las ecuaciones paramétricas siguientes corresponde a un lugar geométrico:

I) $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$ II) $\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = -1 + 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$

a) Elimina el parámetro en cada una, determina sus ecuaciones cartesianas e identifica de qué lugares geométricos se trata.

b) Halla las coordenadas de los puntos comunes a ambos lugares geométricos.

7. Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{sen}^2\, x}$.

a) Calcula los extremos relativos y/o absolutos de la función en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

b) Halla la ecuación de la tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{4}$.

8. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

a) Determina su dominio y calcula los límites laterales cuando $x \to 1$.

b) Estudia su continuidad y halla el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

9. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x^2 + x - 1)}{\displaystyle\int_1^x e^{2t}\, dt}$.

10. Se considera el recinto limitado por la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x + 5}$, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

a) Determina el área de dicho recinto.

b) Calcula el volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje de abscisas.

Soluciones

1. Como $|A| = (a - 2)(a - 7)$, A^{-1} existe siempre que $a \neq 2$ y $a \neq 7$. Entonces la solución del sistema es:

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{(a-2)(a-7)}\begin{pmatrix}-5a-4 & 15-4a & 3+a^2\\ 6 & a-5 & -1-a\\ 4-a & 1 & a-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{2}{a-7}\begin{pmatrix}3a-8\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

2. $|A| = 2(3k^2 - 11k + 8) = 2(x - 1)(3k - 8)$. Por tanto:

Si $k \neq 1$ y $k \neq \frac{8}{3} \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. La solución es:

$$\left(x=\frac{-2(k^2-k+3)}{(k-1)(3k-8)},\ y=\frac{k^3-7k+13}{(k-1)(3k-8)},\ z=\frac{-4k^2+9k-3}{(k-1)(3k-8)}\right)$$

Si $k = 1$ o $k = \frac{8}{3} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema incompatible.

3.
$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a\\ m+n & n+l & l+m\\ x+y & y+z & z+x\end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a\\ 2(m+n+l) & n+l & l+m\\ 2(x+y+z) & y+z & z+x\end{vmatrix}=$$

$$=2\begin{vmatrix} a & b+c & c+a\\ m & n+l & l+m\\ x & y+z & z+x\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b+c & c\\ m & n+l & l\\ x & y+z & z\end{vmatrix}=$$

$$=2\begin{vmatrix} a & b & c\\ m & n & l\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

4. Las rectas en forma paramétrica son:

$$r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=1+2\lambda\end{cases}\qquad s:\begin{cases}x=\mu\\ y=3+m+m\mu\\ z=2+2\mu\end{cases}$$

Los vectores directores son: $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (1, m, 2)$. Para que sean paralelas, $m = 1$. El plano que las contiene tiene por vectores directores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AB}$, con $A(0, -2, 1) \in r$ y $B(0, 4, 2) \in s$, por lo que resulta:

$$\pi:\begin{vmatrix} x & y+2 & z-1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 6 & 1\end{vmatrix} = 7x + y - 6z + 8 = 0$$

5. La recta r está determinada por $A(3, 4, 5)$ y $\vec{u} = (2, 1, 3)$. Un vector normal a la recta s que corta perpendicularmente a r es $\vec{v} = \vec{u} \times \overrightarrow{PA} = (-10, -10, 10) \sim (1, 1, -1)$, y un vector director de s será:

$$\vec{d} = \vec{v} \times \vec{u} = (4, -5, -1) \Rightarrow s:\begin{cases}x=3+4\mu\\ y=-1-5\mu\\ z=-\mu\end{cases}$$

6. a) $\begin{cases}t=x-3\\ t=y-2\end{cases} \Rightarrow x - 3 = y - 2 \Rightarrow x - y - 1 = 0.$

Se trata de una recta en el plano.

Teniendo en cuenta la relación fundamental de la trigonometría, $\text{sen}^2\, t + \cos^2 t = 1$, se tiene:

$$\cos t = \frac{x-2}{2};\ \text{sen}\, t = \frac{y+1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

Circunferencia de centro $C(2, -1)$ y radio $r = 2$.

b) Puntos de corte: $\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2=4\\ x-y-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\ x_2=2\end{cases}$

Los puntos son $A(0, -1)$ y $B(2, 1)$.

7. a) $D = \mathbf{R}$. f es continua y positiva en D.

$$f'(x) = \frac{-2\,\text{sen}\,x\ \cos x}{[1+\text{sen}^2 x]^2} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm\pi,\ x = \pm\frac{\pi}{2}$$

El signo de la derivada se da en la tabla:

$-\pi \qquad -\frac{\pi}{2} \qquad 0 \qquad +\frac{\pi}{2} \qquad +\pi$

f′	−	+	−	+
f				

Como $f(-\pi) = f(\pi) = f(0) = 1$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$, significa que estos son los máximos y mínimos absolutos, respectivamente.

b) Punto de tangencia: $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\right)$. Pendiente:

$$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{9} \Rightarrow \text{Ecuación: } y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

8. a) $D = \mathbf{R} - \{1\}$. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x-1}{x(x-1)} = \frac{e-1}{0^-} = -\infty$;

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x-1}{x(x-1)} = \frac{e-1}{0^+} = +\infty$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x-1} = -e$. La función será continua en $x = 0 \Leftrightarrow a = -e$. Es continua en todo el resto del dominio excepto en $x = 1$, en el que tiene una discontinuidad inevitable con salto infinito.

9.
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+x-1)}{\displaystyle\int_1^x e^{2t}\,dt} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2x+1}{x^2+x-1}}{e^{2x}} = \frac{3}{e^2}$$

10. f es continua en todo su dominio, $D = [-1, +\infty)$.

a) $\displaystyle A = \int_{-1}^{3}\frac{\sqrt{x+1}}{x+5}\,dx$; tomando $x + 1 = t^2$ resulta:

$$A = \int_0^2\frac{t}{t^2+4}\cdot 2t\,dt = \int_0^2\left(2-\frac{8}{t^2+4}\right)dt =$$

$$=\left[2t - \text{arctg}\frac{t}{2}\right]_0^2 = (4-\pi)\ \text{u}^2$$

b)
$$V = \pi\int_{-1}^{3}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+5}\right)^2 dx = \pi\int_{-1}^{3}\frac{x+1}{(x+5)^2}\,dx =$$

$$=\pi\left(\int_{-1}^{3}\frac{dx}{x+5} - 4\int_{-1}^{3}\frac{dx}{(x+5)^2}\right) =$$

$$=\pi\left[\ln|x+5| + \frac{4}{x+5}\right]_{-1}^{3} = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\ \text{u}^3$$

Notas:

Notas:

Notas:

Notas:

Notas:

Notas:

PROYECTO EDITORIAL
Equipo de Educación Secundaria de Ediciones SM

AUTORES
Fernando Alcaide
Concepción Bermejo
Sotero Calvo
Juan Jesús Donaire

EDICIÓN
Juan Alberto Torresano
Javier Calvo

ILUSTRACIÓN
Modesto Arregui

DISEÑO
Maritxu Eizaguirre
Alfonso Ruano

MAQUETACIÓN
Grafilia, SL

COORDINACIÓN EDITORIAL
Josefina Arévalo
Nuria Corredera

DIRECCIÓN EDITORIAL
Aída Moya