19 Integral definida

1. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_0^2 x \cdot e^{-2x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \text{ sen } x\, dx$

2. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_0^1 x \text{ arctg } x\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3\, x\, dx$

3. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_1^e (\text{L}x)^2\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3 - 2 \text{ tg } x}}{\cos^2 x}\, dx$

4. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2}\, dx$

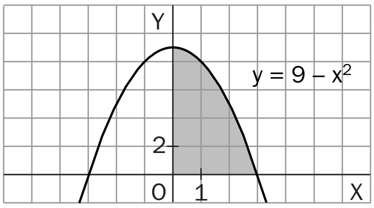
b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x - 1)(x + 2)^2}$

5. Calcula los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x) = -2x + \displaystyle\int_0^{2x} e^{t^2 - 10t + 24}\, dt$

6. a) Mediante el cálculo directo de la integral definida, demuestra que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - 4} dx = 0$

b) Demuestra la igualdad anterior aplicando las propiedades de la integral definida.

7. Halla una aproximación por defecto del área de la región que aparece en la figura y que está limitada por la función $f(x) = 9 - x^2$ y el eje OX en el intervalo [1, 3] dividiendo este en tres partes iguales.



8. Halla una aproximación por exceso del área de la región limitada por la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y el eje OX en el intervalo [2, 4], dividiendo este en dos partes iguales.

9. Calcula la derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (t^2 - 1)\, dt$

SOLUCIONES

1. a) $\displaystyle\int_0^2 x \cdot e^{-2x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{4}e^{-2x^2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}(1 - e^{-8})$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \text{ sen } x\,dx =$

$\displaystyle= \Big[-x^2\cos x + 2x \text{ sen } x + 2\cos x\Big]_0^{\pi} = \pi^2 - 4$

2. a) $\displaystyle\int_0^1 x \text{ arctg } x\,dx =$

$\displaystyle= \left[\frac{x^2}{2}\text{ arctg } x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{ arctg } x\right]_0^1 =$

$\displaystyle= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3 x\,dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

3. a) $\displaystyle\int_1^e (\text{L}x)^2\,dx = \Big[x(\text{L}x)^2 - 2x\,\text{L}x + 2x\Big]_1^e = e - 2$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3 + 2\text{ tg } x}}{\cos^2 x}\,dx = \left[-\frac{\sqrt{(3 + 2\text{ tg } x)^3}}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$\displaystyle= \frac{3\sqrt{3} - 1}{3}$

4. a) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2}\,dx =$

$\displaystyle= \int_{-1}^0 \left(x + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}\right)dx =$

$\displaystyle= \Big[x^2 + 2\text{L}\,|x - 1| - \text{L}\,|x + 2|\Big]_{-1}^0 =$

$\displaystyle= -\frac{1}{2} - 3\text{L}2$

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x - 1)(x + 2)^2} =$

$\displaystyle= \int_2^3 \left(\frac{\frac{1}{9}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{9}}{x + 2} + \frac{-\frac{1}{3}}{(x + 2)^2}\right)dx =$

$\displaystyle= \left[\frac{1}{9}\text{L}\,|x - 1| - \frac{1}{9}\text{L}\,|x + 2| + \frac{1}{3}\frac{1}{x + 2}\right]_2^3 =$

$\displaystyle= \frac{1}{9}\text{L}\left(\frac{8}{5}\right) - \frac{1}{60}$

5. Se considera $F(x) = G(u) = \displaystyle\int_0^u e^{t^2 - 10t + 24}\,dt$ con $u = 2x$ y $u' = 2$

Entonces $F'(x) = \dfrac{dF}{dx} = \dfrac{dG(u)}{du}\dfrac{du}{dx} =$

$= e^{u^2 - 10u + 24} \cdot u' = 2e^{4x^2 - 20x + 24}$, es decir:

$f'(x) = -2 + 2e^{4x^2 - 20x + 24} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ si $e^{4x^2 - 20x + 24} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 20x + 24 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 3$

6. a) Descomponiendo en fracciones simples:

$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - 4}\,dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{\frac{1}{2}}{x + 2} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 2}\right)dx =$

$\displaystyle= \left[\frac{1}{2}\text{L}\,|x^2 - 4|\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\text{L}|3| - \frac{1}{2}\text{L}(3) = 0$

b) La función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$, lo cual implica que:

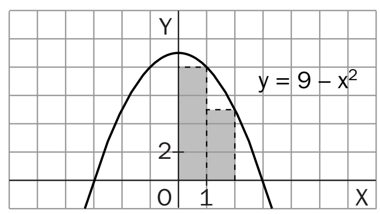
$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = -\int_{-a}^0 f(x)\,dx$

Por tanto:

$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - 4}dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 - 4}dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2 - 4}dx = 0$

7. Se consideran los tres rectángulos que aparecen en la figura y que tienen por bases 1 y por alturas:

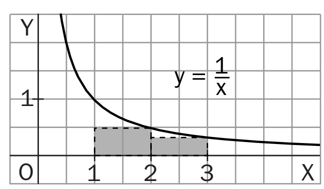
$f(1) = 9 - 1 = 8 \quad f(2) = 9 - 4 = 5 \quad f(3) = 9 - 9 = 0$



Por tanto: $S = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 13$ uc

8. Se consideran los dos rectángulos que aparecen en la figura y que tienen por bases 1 y por alturas:

$f(2) = \dfrac{1}{2} \qquad f(3) = \dfrac{1}{3}$



Por tanto: $S = 1 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$ uc

9. $F(x) = G(u) = \displaystyle\int_0^u (t^2 - 1)\,dt$ con $u = x^2$

Aplicando la regla de la cadena:

$F'(x) = \dfrac{dF}{dx} = \dfrac{dG}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = (u^2 - 1) \cdot u' =$

$= (x^4 - 1) \cdot 2x = 2x^5 - 2x$

19 La integral definida

1. Calcula el valor de la integral $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$ en función de los valores de n.

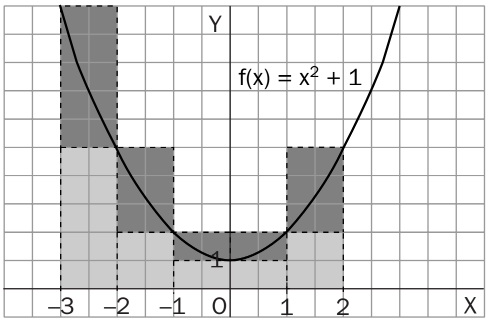
2. Sea $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\, dt$. Calcula $F'(x)$.

3. Si $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt$. Calcula:

a) $F'(x)$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt$

4. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t^2\, \mathrm{L}(1 + 4t^2)\, dt}{x^5}$

5. Dada la función $f(x) = x^2 + 1$ definida en el intervalo $[-3, 2]$ y la partición P del mismo formada por los puntos $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ tal y como aparece en la figura, calcula razonadamente cuánto valen la suma superior y la suma inferior correspondiente a dicha partición y a dicho intervalo.



6. Demuestra que $\frac{2}{3} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2 + x}}$

(Indicación: Estudia el máximo de la función $\sqrt{2 - x^2 + x}$ en $(0, 1)$).

7. Sea f una función real de variable real, continua y positiva tal que $\int_0^x f(t)\, dt = e^x + \operatorname{arctg} x + a$. Aplicando el teorema fundamental del cálculo, determina el valor de la constante a y halla la expresión algebraica de $f(x)$.

8. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{3} |x - 1|\, dx$ b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}$

9. a) Halla los máximos y mínimos, si es que existen, de la función $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + 2\cos t}\, dt$

b) Calcula la derivada de la función $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt$

SOLUCIONES

1. $I(n) = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx$; integrando por partes:

$$F(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \operatorname{sen} nx}{n^3}$$

Entonces: $I(n) = F(\pi) - F(-\pi) =$

$$= 2\left[\frac{\pi^2 \operatorname{sen} n\pi}{n} + \frac{2\pi \cos n\pi}{n^2} - \frac{2 \operatorname{sen} n\pi}{n^3}\right]$$

2. $F(x) = G(u) = \int_0^u \operatorname{arcsen} t\,dt$, con $u = \operatorname{sen} x$.

Entonces: $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{dG(u)}{du}\frac{du}{dx} =$

$= \operatorname{arcsen} u \cdot u'$

$F'(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x \Rightarrow F'(x) = x \cdot \cos x$

3. a) $F'(x) = \operatorname{sen} x^2$

b) Es de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital: $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

4. Si $F(x) = \int_0^x t^2\,\mathrm{L}(1 + 4t^2)\,dt$, $L = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^5} = \frac{0}{0}$.

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$L = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{5x^4}$, y como $F'(x) = x^2\,\mathrm{L}(1 + 4x^2)$,

tendremos $L = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{L}(1 + 4x^2)}{5x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x}{(1 + 4x^2)\cdot 10x} = \lim_{x\to 0} \frac{8}{10(1 + 4x^2)} = \frac{4}{5}$$

5. La suma de las áreas de los rectángulos superiores es:

$S = 1 \cdot f(-3) + 1 \cdot f(-2) + 1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) = 10 + 5 + 2 + 2 + 5 = 24$

La suma de las áreas de los rectángulos inferiores es:

$s = 1 \cdot f(-2) + 1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) = 5 + 2 + 1 + 1 + 2 = 11$

6. El máximo de la función $\sqrt{2 - x^2 + x}$ es $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Por tanto, $\sqrt{2 - x^2 + x} \leqslant \frac{3}{2}$ en $(0, 1)$; es decir, $\frac{1}{\sqrt{2 - x^2 + x}} \geqslant \frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2 + x}} \geqslant \int_0^1 \frac{2}{3}\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 - x^2 + x}} \geqslant \frac{2}{3}$$

7. Sustituyendo $x = 0$ en la expresión:

$$\int_0^0 f(t)\,dt = e^0 + \operatorname{arctg} 0 + a = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$

Según el teorema a fundamental del cálculo, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2}$$

8. $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 1 - x & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$$\int_{-2}^3 |x - 1|\,dx = \int_{-2}^1 (1 - x)\,dx + \int_1^3 (x - 1)\,dx =$$

$$= \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}(\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \left[\frac{(\operatorname{arctg} x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi^3}{64}} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{12}$$

9. a) $F'(x) = \frac{1}{1 + 2\cos x}$

Esta función derivada no se anula en ningún punto. La función no tiene máximos ni mínimos.

b) Sea $H(t)$ una primitiva de $g(t) = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$.

Por la regla de Barrow:

$G(x) = H(x^2) - H(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow G'(x) = 2x \cdot H'(x^2) - H'(x)$

Como $H'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow G'(x) = \frac{2x}{\operatorname{sen} x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$