Ejercicio nº 1.-

Si I es la matriz identidad de orden 2 y $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.

Solución:

Calculamos $A^2 - xA - yI$ e igualamos a 0:

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ -6 & -5\end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ -6 & -5\end{pmatrix}-x\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2x-y & 9-3x\\ -6+2x & -5-x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Así, tenemos que ha de ser:

$$\left.\begin{aligned}-2-2x-y&=0\\ 9-3x&=0\\ -6+2x&=0\\ -5-x-y&=0\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\rightarrow\; y=-2-2x=-2-6=-8\\ &\rightarrow\; x=3\\ &\rightarrow\; x=3\\ &\rightarrow\; y=-5-x=-5-3=-8\end{aligned}$$

Por tanto: $x = 3$, $y = -8$

Ejercicio nº 2.-

Se considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$, **donde a, b y c son tres números reales arbitrarios.**

a) Encuentra A^n para todo natural n.

b) Calcula $\left(A^{35}-A\right)^2$.

Solución:

a) $A^1 = A$

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & ac\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $A^3 = 0$, tenemos que $A^n = 0$ para $n \geq 3$.

b) Teniendo en cuenta lo obtenido en a):

$$\left(A^{35} - A\right)^2 = (0 - A)^2 = (-A)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 3.-

Calcula el rango de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-8} & \mathbf{9} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-10} & \mathbf{15} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 5\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \\ 0 & -20 & 20 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2\cdot 2^a \\ 4^a - 4\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } ran(A) = 2.$$

Ejercicio nº 4.-

Dados los vectores:

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{3},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{0});\ \vec{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{1});\ \vec{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{-1})$$

Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2$, $\vec{\mathbf{u}}_3$.

Solución:

Calcula el rango de la matriz cuyas filas son los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 7 \cdot 3^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{pmatrix}.$$ Por tanto, el rango de la matriz es 3.

Esto significa que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ son linealmente independientes.

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos *A, B,* y *C,* que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:

PRODUCTO / MATERIAL	*A*	*B*	*C*
CHATARRA	8	6	6
CARBÓN	6	6	4
ALEACIONES	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de *A,* 4 de *B* y 3 de C.

Solución:

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{r} \\ \text{CHATARRA} \\ \text{CARBÓN} \\ \text{ALEACIONES} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{CHATARRA} \\ \text{CARBÓN} \\ \text{ALEACIONES} \end{matrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 72 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Es decir, necesitaremos 90 unidades de chatarra, 72 de carbón mineral y 25 de aleaciones.

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Sea *A* una matriz cuadrada de orden 3 que cumple la igualdad $A^3 - 4A^2 + 3A + I = 0$, donde *I* es la matriz unidad de orden 3. Demuestra que *A* tiene inversa y calcúlala en función de *A*.

Solución:

Puesto que $A^3 - 4A^2 + 3A + I = 0 \;\rightarrow\; 4A^2 - A^3 - 3A = \mathrm{I} \;\rightarrow\; A(4A - A^2 - 3) = I$

A tiene inversa si existe una matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I.$

Como $A \cdot \underbrace{\left(4A - A^2 - 3\right)}_{A^{-1}} = I \rightarrow A$ tiene inversa; su valor en función de A es $A^{-1} = 4A - A^2 - 3.$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Calcula los valores de x para que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

verifique la ecuación $A^2 - 6A + 9I = 0$, donde I y 0 son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

Solución:

Calculamos $A^2 - 6A + 9I$ e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 - 6x + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha de ser:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \;\rightarrow\; x = 3$$

Por tanto, el único valor de x que hace que se verifique la igualdad propuesta es $x = 3$.

Ejercicio nº 8.-

Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Despejamos X en la ecuación propuesta:

$$2A = AX + B \rightarrow 2A - B = AX \rightarrow A^{-1}(2A - B) = A^{-1}AX \rightarrow$$

$$\rightarrow 2A^{-1}A - A^{-1}B = IX \rightarrow 2I - A^{-1}B = X$$

Calculamos la inversa de A:

Llamamos $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ de donde:}$$

$$\left.\begin{array}{r} a = 1 \\ b = 0 \\ -a + c = 0 \\ -b + d = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = a = 1 \\ d = 1 + b = 1 + 0 = 1 \end{array}\right\} \text{ Por tanto: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operamos para obtener $X = 2I - A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = 2I - A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 9.-

Estudia el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 4\cdot 1^a \\ 3^a - 2\cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a + 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } ran(A) = 3.$$

Ejercicio nº 10.-

Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores:

$$\vec{u}_1 = (1,\ 1,\ -1,\ 1);\ \vec{u}_2 = (2,\ 3,\ -2,\ 1);\ \vec{u}_3 = (1,\ 3,\ -1,\ -1)$$

Solución:

Estudiemos el rango de la matriz cuyas filas son los tres vectores dados. El rango coincide con el número de vectores linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz es 2. Luego, hay dos vectores linealmente independientes; el tercero se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.

Los tres vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ son linealmente dependientes.

Ejercicio nº 11.-

Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz *A*. La evolución de los precios de los años 1997 a 2000 viene reflejada en la matriz *B*.

a) Hallar, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indicar que información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solución:

a) La matriz A es 3×3 y la B es 3×4. Para poder efectuar el producto de dos matrices, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

Por tanto, el producto $B \cdot A$ no se puede hacer, pero el $A \cdot B$ sí.

$$A \cdot B = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 106150 & 111300 & 113250 & 122750 \\ 108580 & 113940 & 115800 & 125450 \\ 73000 & 76200 & 78000 & 84500 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz $A \cdot B$ nos da el gasto anual de cada familia en el total de los tres productos durante los años 1997 a 2000.

b) El elemento $c_{34} = 84\,500$, corresponde a la familia tercera en el año 2000; es decir, nos indica el gasto total de esta familia en los tres productos durante ese año.

Ejercicio nº 12.-

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} \neq 0$ si $i = j$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

a) ¿Qué condición han de cumplir los elementos de A para que exista A^{-1}?

b) Calcula la inversa de A en función de los elementos de A.

Solución:

a) A es una matriz de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Partiendo de como son A e I, se deduce que $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$.

Luego,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & by & 0 \\ 0 & 0 & cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} ax = 1 \rightarrow x = \dfrac{1}{a} \\ by = 1 \rightarrow y = \dfrac{1}{b} \\ cz = 1 \rightarrow z = \dfrac{1}{c} \end{cases}$$

Para que $A \cdot A^{-1} = I$, es suficiente que a, b, c sean distintos de cero (simultáneamente).

b) Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 13.-

Obtén el valor de k para que el rango de la matriz A sea igual a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & k^2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & k^2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 4\cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 & -6 & k^2-4 \\ 0 & k & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $k = -2$, la segunda y tercera fila coinciden. Por tanto, $ran(A) = 2$.
- Para cualquier otro $k \neq -2$, $ran(A) = 3$.

Ejercicio nº 14.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2, A^3, A^4, A^5.

b) Halla el valor de $A^{25} + A^{-1}$.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$$A^5=A^4A=IA=A$$

b) $A^{25}=A^{4\cdot 6+1}=\left(A^4\right)^6A=I^6A=IA=A$

Para hallar A^{-1}, tenemos en cuenta que:

$$A^4=A^3A=I\quad\rightarrow\quad A^{-1}=A^3$$

Utilizando los resultados del apartado a), tenemos que:

$$A^{25}+A^{-1}=A+A^3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio nº 15.-</u>

Averigua cuál es el rango de:

$$A=\begin{pmatrix}-3&0&1&1\\-1&1&-1&1\\1&2&-3&1\\-2&-1&2&0\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix}-3&0&1&1\\-1&1&-1&1\\1&2&-3&1\\-2&-1&2&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{array}{c}2^a\\1^a\\3^a\\4^a\end{array}\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\-3&0&1&1\\1&2&-3&1\\-2&-1&2&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a-3\cdot 1^a\\3^a+1^a\\4^a-2\cdot 1^a\end{array}\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\0&-3&4&-2\\0&3&-4&2\\0&-3&4&-2\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a \\ 3^a+2^a \\ 4^a-2^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } ran(A)=2.$$

Ejercicio nº 16.-

a) Halla el rango de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:

$$\vec{u}_1=(2,\ -1,\ 3,\ 4);\ \vec{u}_2=(0,\ 1,\ 1,\ 2)\ \text{ y }\ \vec{u}_3=(-1,\ 3,\ 4,\ 1)$$

Solución:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a+2\cdot 1^a \\ 3^a+3\cdot 1^a \\ 4^a+4\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 13 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a \\ 3^a-2\cdot 2^a \\ 4^a-3\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 3\cdot 4^a+2\cdot 3^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } ran(A)=3.$$

b) Observamos que las columnas de la matriz A coinciden con los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

El número de vectores linealmente independientes es el rango de A. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

Ejercicio nº 17.-

En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:

– Lote *A*: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.
– Lote *B*: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.
– Lote *C*: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.

Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.

a) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.

b) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes A, B y C.

Solución:

a) La matriz será:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{CARPETAS} & \text{CUADERNOS} & \text{BOLÍGRAFOS} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Los precios de cada carpeta, cada cuaderno y cada bolígrafo se resumen en la matriz:

$$\begin{array}{c} \text{CARPETA} \\ \text{CUADERNO} \\ \text{BOLÍGRAFO} \end{array} \begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la matriz obtenida en a) con esta última, obtendremos la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{CARPETA} & \text{CUADERNO} & \text{BOLÍGRAFO} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{CARPETA} \\ \text{CUADERNO} \\ \text{BOLÍGRAFO} \end{array} \begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \\ 0{,}24 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 7{,}74 \\ 11{,}22 \\ 17{,}46 \end{pmatrix}$$

Es decir, el lote A cuesta 7,74 euros, el lote B, 11,22 euros y el lote C, 17,46 euros.

Ejercicio nº 18.-

Estudia el rango de la matriz M según los valores de a. ¿Existe algún valor de a que haga $ran(M) = 1$?

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

Transformamos la matriz M para hacer todos los ceros posibles en ella:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 3^a \\ 1^a \\ 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 4 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - a \cdot 1^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 4-a^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $4 - a^2 = 0 \rightarrow a = 2,\ a = -2$: Las dos últimas filas coinciden $\rightarrow ran(M) = 2$.
- Si $4 - a^2 \neq 0 \rightarrow a \neq 2,\ a \neq -2$: $ran(M) = 3$.

El rango de M no puede ser igual a 1 para ningún valor de a, ya que las dos primeras filas son linealmente independientes para cualquier a.