1 Matrices

1. Calcula los valores de las letras para que las siguientes matrices sean iguales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & -b \\ 2 + c & -3 & d + 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} e & -3 & 1 - f & 5 \\ -3 & 2 + 5g & -6 & 3h - 1 \end{pmatrix}$$

2. Dadas la matriz fila $A = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$ y la matriz columna $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B$.

b) Calcula $B \cdot A$.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A + B$, $A - B$ y $2A - 3B$.

b) Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

4. Dadas las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2, A^3 y A^4.

b) Calcula $A^2 - 3A + 2I$.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A.

b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

6. Calcula las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

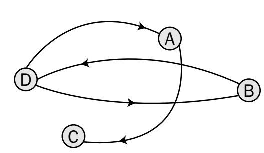
$$\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 16 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

7. Calcula el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

8. En cierta zona de montaña existen cuatro refugios, A, B, C y D, que están comunicados por sendas según se establece en el siguiente grafo:



Ten en cuenta que, debido a su pendiente, el recorrido en alguno de los sentidos de ciertas sendas carece de interés para los deportistas.

a) Forma la matriz M asociada al grafo.

b) Calcula la matriz M^2 e interpreta los resultados.

SOLUCIONES

1. Si $A = B$ entonces:

$$\begin{matrix} 1=e & a=-3 & -2=1-f & -b=5 \\ 2+c=-3 & -3=2+5g & d+1=-6 & 5=3h-1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e=1 & a=-3 & f=3 & b=-5 \\ c=-5 & g=-1 & d=-7 & h=2 \end{cases}$$

2. a) $A \cdot B = (1\ 2\ 3\ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (50)$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot (1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ 7 & 14 & 21 & 28 \end{pmatrix}$

3. a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

$2A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \\ -3 & -14 & -5 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & -12 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

4. a) $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} -29 & 30 \\ -45 & 46 \end{pmatrix}$

b) $A^2 - 3A + 2I =$

$= \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}$

5. a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_2 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + F_2]{}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$

b) $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$

6.

$$\begin{cases} 2X + 4Y = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \\ -2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} Y = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

7. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango $A = 2$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_1 + F_2]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Como las dos filas que quedan no son proporcionales, se deduce que rango $B = 2$.

8. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esta matriz expresa de qué forma se puede ir de un refugio a otro, o al mismo, pero pasando previamente por otro.

1 Matrices

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2, A^3 y A^4.

b) Escribe, en función de n, la n-ésima potencia de A.

c) Calcula el valor de la matriz $T = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$.

2. Realizando las transformaciones que consideres adecuadas al aplicar el método de Gauss, calcula la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las matrices $X = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Demuestra que A y B son conmutables, es decir, que $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Calcula las potencias n-ésimas de A y de B.

c) Escribe X en función de A y de B.

d) Aplica la fórmula del binomio de Newton para calcular X^n. Ten en cuenta que puedes aplicar dicha fórmula ya que A y B son conmutables.

4. Se dice que una matriz cuadrada es **idempotente** cuando verifica que su segunda potencia es igual a ella misma.

a) Escribe algún ejemplo de matriz cuadrada de orden 3, distinta de la matriz unidad y de la matriz nula, y que sea idempotente.

b) Calcula el valor de λ que hace que la segunda potencia de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ sea igual a la misma matriz A y que, por lo tanto, hace que la matriz A sea idempotente.

c) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que sean idempotentes.

5. Se dice que una matriz cuadrada es **nilpotente** cuando alguna de sus potencias es igual a la matriz nula. En el caso de que n sea el menor entero positivo tal que $A^n = O$, se dice que A es una matriz nilpotente de **grado** n.

a) Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ verifica que $A^3 = O$ y que, por tanto, es nilpotente de grado 3.

b) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que verifiquen que su segunda potencia sea igual a la matriz nula y que, por tanto, sean nilpotentes de grado 2.

6. Ciertos animales de cierta especie se clasifican de la siguiente forma según que posean los siguientes tipos de genes:

TIPO 1: *GG* dominante TIPO 2: *Gg* híbrido TIPO 3: *gg* recesivo

La reproducción de estos animales siempre se realiza mediante el cruce de un animal del tipo 1 con otro de cualquier tipo. Los hijos heredan un gen de cada padre con probabilidad 0,5.

a) Escribe los valores de la matriz A de forma que:

i) A sea una matriz cuadrada de orden 3.

ii) a_{ij} representa la probabilidad de que sabiendo que la madre es un animal del tipo i el hijo resulta ser un animal del tipo j.

b) Escribe los valores de la matriz B de forma que:

i) B sea una matriz cuadrada de orden 3.

ii) b_{ij} representa la probabilidad de que, sabiendo que la abuela materna es un animal del tipo i, el nieto resulta ser un animal del tipo j.

SOLUCIONES

1. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Observando las potencias, se obtiene:

Si $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1-n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $T = I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$

$+ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -n+1 & \dfrac{-n(n+1)}{2} \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$

2. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[3F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -21 & 15 & -9 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 + 7F_2]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + F_3]{F_2 + 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}F_2]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$

3. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= A + \lambda B$

d) $X^n = (A + \lambda B)^n = A^n + n\lambda A^{n-1} \cdot B +$

$+ \binom{n}{2} \lambda^2 A^{n-2} \cdot B^2 + \dots + \binom{n}{n} \lambda^n B^n =$

$= A^n + \lambda^n B^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1+\lambda^n & 1-\lambda^n \\ 1-\lambda^n & 1+\lambda^n \end{pmatrix}$

4. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = A \Rightarrow A$ es idempotente.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 + 2\lambda & 2 \\ \lambda & 9 + 2\lambda \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 16 + 2\lambda = 4 \\ 9 + 2\lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -6$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ab & a \\ b & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 + ab = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

5. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^3 = 0$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

6. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

B se puede calcular elevando la matriz A al cuadrado.