1 Demostrar, sin desarrollar, que los siguientes determinantes valen cero:

$$A=\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & a+c\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix}a & 3a & 4a\\ a & 5a & 6a\\ a & 7a & 8a\end{vmatrix}$$

2 Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante es múltiplo de 15:

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 2 & 5\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix}$$

3 Resolver las siguientes ecuaciones sin desarrollar los determinantes.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x^2\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix}a & b & c\\ a & x & c\\ a & b & x\end{vmatrix}=0$$

4 Aplicando las propiedades de los determinantes, calcular:

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \qquad C=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & a+3 & b+4\\ 2 & c+3 & d+4\end{vmatrix}$$

5 Calcular el valor de:

$$A=\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}$$ por Adjuntos

$$B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9\end{vmatrix}$$ por el método de Gauss

6 Calcular los determinantes de Vandermonde:

$$A=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix}$$

7 Hallar la matriz inversa de:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -4\\ 3 & 7 & -3\end{pmatrix}$$

8 Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 6\\ -1 & -2 & 0 & -3\\ 3 & 5 & 1 & 9\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 0 & 3 & 3\\ 1 & 6 & 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

9 Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

1 $A \cdot X = B$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}$$

2 $X \cdot A + B = C$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

Ejercicio 1.-

$$A=\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & a+c\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}\xrightarrow{c_3-c_2}\begin{vmatrix}1 & a & a+b+c\\ 1 & b & a+b+c\\ 1 & c & a+b+c\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & c & 1\end{vmatrix}=0$$

Tiene dos líneas proporcionales.

$$B=\begin{vmatrix}a & 3a & 4a\\ a & 5a & 6a\\ a & 7a & 8a\end{vmatrix}=0$$

La tercera columna es igual a la suma de las otras dos.

Ejercicio 2.-

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 2 & 5\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix}=\xrightarrow{100c_1+10c_2+c_3}=\begin{vmatrix}1 & 5 & 150\\ 2 & 2 & 225\\ 2 & 5 & 255\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}1 & 5 & 10\\ 2 & 2 & 15\\ 2 & 5 & 17\end{vmatrix}=\dot{15}$$

Ejercicio 3.-

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x^2\end{vmatrix}\xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & x-1 & 0\\ 0 & 0 & x^2-1\end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)(x^2-1)=0 \qquad \begin{matrix}x=1\\ x=-1\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & x & c\\ a & b & x\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & x & c\\ a & b & x\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 1 & x & c\\ 1 & b & x\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 0 & b-x & 0\\ 0 & 0 & c-x\end{vmatrix}$$

$$=a(b-x)(c-x)a(b-x)(c-x)=0 \qquad \begin{matrix}x=b\\ x=c\end{matrix}$$

Ejercicio 4.-

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=\xrightarrow[f_3-f_2]{f_2-f_1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}=0$$

$$B=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1=1$$

$$C=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & a+3 & b+4\\ 2 & c+3 & d+4\end{vmatrix}=\xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1}\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=2(ad-bc)$$

Ejercicio 5.-

$$A=\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}=\xrightarrow{c_1=c_1+c_2+c_3+c_4}=\begin{vmatrix}a+3 & 1 & 1 & 1\\ a+3 & a & 1 & 1\\ a+3 & 1 & a & 1\\ a+3 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$=(a+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}=\xrightarrow{\substack{f_2-f_1\\ f_3-f_1\\ f_4-f_1}}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}=$$

$$=(a+3)(a-1)^3$$

$$B=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&3&3&3&3\\1&3&5&5&5\\1&3&5&7&7\\1&3&5&7&9\end{vmatrix}=\begin{matrix}\xrightarrow{f_2-f_1}\\\xrightarrow{f_3-f_2}\\\xrightarrow{f_4-f_3}\\\xrightarrow{f_5-f_4}\end{matrix}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&2&2&2&2\\0&0&2&2&2\\0&0&0&2&2\\0&0&0&0&2\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=16$$

Ejercicio 6.-

$$A=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=\begin{matrix}\xrightarrow{c_2-a\cdot c_1}\\\xrightarrow{c_3-a\cdot c_2}\end{matrix}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&b-a&b^2-ab\\1&c-a&c^2-ac\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a&b(b-a)\\c-a&c(c-a)\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&b\\1&c\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$B=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}=\begin{matrix}\xrightarrow{f_2-a\cdot f_1}\\\xrightarrow{f_3-a\cdot f_2}\\\xrightarrow{f_4-a\cdot f_3}\end{matrix}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&b-a&c-a&d-a\\0&b^2-ab&c^2-ac&d^2-ad\\0&b^3-ab^2&c^3-ac^2&d^3-ad^2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}b-a&c-a&d-a\\b(b-a)&c(c-a)&d(d-a)\\b^2(b-a)&c^2(c-a)&d^2(d-a)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&d\\b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}=$$

$$\begin{matrix}\xrightarrow{f_2-b\cdot f_1}\\\xrightarrow{f_3-b\cdot f_2}\end{matrix}=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&c-b&d-b\\0&c^2-bc&d^2-bd\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}c-b&d-b\\c(c-b)&d(d-b)\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1&1\\c&d\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Ejercicio 7.-

$$A=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&1&4\\3&7&-3\end{vmatrix}=54\qquad A^*=\begin{pmatrix}25&-9&4\\7&9&14\\-1&9&2\end{pmatrix}$$

$$(A^*)^t=\begin{pmatrix}25&7&-1\\9&9&9\\4&-14&2\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{25}{54}&\frac{7}{54}&\frac{-1}{54}\\\frac{-9}{54}&\frac{-9}{54}&\frac{9}{54}\\\frac{4}{54}&\frac{-14}{54}&\frac{2}{54}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{25}{54}&\frac{7}{54}&\frac{-1}{54}\\\frac{-1}{6}&\frac{-1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{2}{27}&\frac{-7}{27}&\frac{1}{27}\end{pmatrix}$$

Ejercicio 8.-

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$|2| = 2 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

r(A) = 2

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|3| = 3 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -99 \neq 0$$

r(B) = 4

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Eliminamos la tercera columna por ser nula, la cuarta por ser proporcional a la primera, y la quinta porque combinación lineal de la primera y segunda: $c_5 = -2 \cdot c_1 + c_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

r(C) = 2

Ejercicio 9.-

1 $A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$|A| = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1}.

$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$$

2 $X \cdot A + B = C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = 1 \neq 0$

$(X \cdot A + B) - B = C - B$

$X \cdot A + (B - B) = C - B$

$X \cdot A + 0 = C - B$

$X \cdot A = C - B$

$X \cdot A \cdot A^{-1} = (C - B) \cdot A^{-1}$

$X (A \cdot A^{-1}) = (C - B) \cdot A^{-1}$

$X \cdot I = (C - B) \cdot A^{-1}$

$X = (C - B) \cdot A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$