8 La recta en el plano

1. En cada uno de los siguientes casos, calcula las coordenadas del vector cuyo origen es el punto A y cuyo extremo es el punto B:

a) $A(2, 3)$ y $B(4, 5)$ b) $A(-2, -4)$ y $B(-4, 5)$

2. a) Del vector $\overrightarrow{PQ} = (5, 3)$ se sabe que $P(-1, 2)$. Calcula las coordenadas del extremo Q.

b) Del vector $\overrightarrow{AB} = (-2, 6)$ se sabe que $B(-2, -4)$. Calcula las coordenadas del origen A.

3. Calcula las coordenadas de los puntos medios de los segmentos que tienen por extremos los puntos A y B en los siguientes casos:

a) $A(2, 3)$ y $B(-4, 3)$ b) $A(-2, 4)$ y $B(-4, 6)$

4. Calcula la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la ecuación general y la ecuación explícita de la recta r en los siguientes casos:

a) r pasa por el punto $A(-1, 3)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (-3, -2)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(-3, 4)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4)$ y su pendiente vale $m = 2$.

5. Calcula el punto de intersección de las siguientes rectas:

a) $\begin{matrix} r: 2x + 3y - 5 = 0 \\ s: -4x + 3y + 1 = 0 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} r: -2x + 4y - 12 = 0 \\ s: x + 3y - 4 = 0 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} r: 3x + 4y - 7 = 0 \\ s: -4x + 3y + 26 = 0 \end{matrix}$

6. Comprueba si las siguientes rectas son secantes, paralelas o coincidentes. En el caso de que sean secantes, calcula el correspondiente punto de corte.

a) $\begin{matrix} r: 2x + 3y - 5 = 0 \\ s: -4x - 6y + 1 = 0 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} r: -2x + 4y - 12 = 0 \\ s: 3x - 6y + 18 = 0 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} r: x + 2y - 3 = 0 \\ s: -2x + 4y - 6 = 0 \end{matrix}$

7. Calcula la ecuación de la recta s que pasa por el punto $P(2, -3)$ y es paralela a la recta r en los siguientes casos:

a) $r: 2x + y = 0$ b) $r: 2x - 3y + 7 = 0$ c) $r: y + 8 = 0$

8. Decide en cuáles de los siguientes casos los puntos A, B y C están alineados y en cuáles forman triángulo.

a) $A(-1, -5)$, $B(0, -3)$, $C(-2, -7)$ b) $A(1, 2)$, $B(2, 7)$, $C(-1, 3)$

9. Calcula las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices $A(1, 2)$, $B(2, 7)$ y $C(-1, 3)$.

10. Dado el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(2, -2)$, $C(0, 0)$.

a) Calcula las coordenadas de su baricentro.

b) Calcula las ecuaciones de las rectas que pasan por el baricentro y son paralelas a cada uno de los lados del triángulo.

c) Escribe la ecuación del haz de rectas cuyo vértice es el baricentro del triángulo.

11. Calcula el valor de k para que la recta $-2kx + (3k - 2)y - k = 0$ pase por el punto $A(-1, 5)$.

12. Calcula el valor de k para que la recta $x + (1 + k)y - 3 - k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo de cuatro unidades cuadradas de área.

SOLUCIONES

1. a) $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$ b) $\overrightarrow{AB} = (-2, 9)$

2. a) $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} \Rightarrow \vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ}$

$\vec{q} = (-1, 2) + (5, 3) = (4, 5) \Rightarrow Q = (4, 5)$

b) $\vec{a} = \vec{b} - \overrightarrow{AB}$

$\vec{a} = (-2, -4) - (-2, 6) = (0, -10) \Rightarrow A = (0, -10)$

3. a) $x_m = \frac{1}{2}(2 - 4) = -1$

$y_m = \frac{1}{2}(3 + 3) = 3$ $\Rightarrow M(-1, 3)$

b) $x_m = \frac{1}{2}(-2 - 4) = -3$

$y_m = \frac{1}{2}(4 + 6) = 5$ $\Rightarrow M(-3, 5)$

4. a) $\vec{x} = (-1, 3) + t(-3, -2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$

$\frac{x + 1}{-3} = \frac{y - 3}{-2} \Rightarrow 2x - 3y + 11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

b) $\vec{x} = (-1, 2) + t(-2, 2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

$\frac{x + 1}{-2} = \frac{y - 2}{2} \Rightarrow x + y - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -x + 1$

c) $y - 4 = 2(x + 3) \Rightarrow y = 2x + 10$

$2x - y + 10 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (0, 10) + t(1, 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 10 + 2t \end{cases}$

5. Se resuelve cada uno de los sistemas y se obtiene:

a) P(1, 1) b) P(−2, 2) c) P(5, −2)

6. a) $\frac{2}{-4} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow$ rectas paralelas

b) $\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6} = \frac{-12}{18} \Rightarrow$ rectas coincidentes

c) $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{4} \Rightarrow$ rectas secantes con punto de corte $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$

7. a) s: $2x + y - 1 = 0$

b) s: $2x - 3y - 13 = 0$

c) s: $y + 3 = 0$

8. A, B y C están alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

a) Están alineados, pertenecen a la recta $y = 2x - 3$.

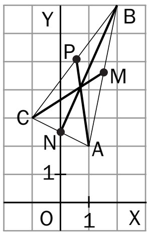
b) Forman triángulo.

9. $M\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, $N\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $P\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

PA: $y = -6x + 8$

NB: $y = \frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$

MC: $y = \frac{3}{5}x + \frac{18}{5}$



10. a) $x_G = \frac{1}{3}(3 + 2 + 0) = \frac{5}{3}$

$y_G = \frac{1}{3}(1 - 2 + 0) = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow G\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

b) Recta paralela a AB y que pasa por G:

$\frac{x - \frac{5}{3}}{-1} = \frac{y + \frac{1}{3}}{-3} \Rightarrow y = 3x - \frac{16}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x - 3y - 16 = 0$

Recta paralela a AC y que pasa por G:

$\frac{x - \frac{5}{3}}{-3} = \frac{y + \frac{1}{3}}{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 9y - 8 = 0$

Recta paralela a BC y que pasa por G:

$\frac{x - \frac{5}{3}}{-2} = \frac{y + \frac{1}{3}}{2} \Rightarrow y = -x + \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 3y - 4 = 0$

c) $\alpha(9x - 3y - 16) + \beta(3x - 9y - 8) = 0$

11. $2k + 5(3k - 2) - k = 0 \Rightarrow 16k - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{5}{8}$

12. $x + (1 + k)y = 3 + k \Rightarrow \frac{x}{3 + k} + \frac{y}{\frac{3 + k}{1 + k}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{(3 + k)^2}{2 + 2k} = 4 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 1$

8 La recta en el plano

1. Calcula los coeficientes a y b para que las rectas r: $3x - 2 = ay$ y s: $4y - 5 = bx$ sean paralelas, sabiendo además que la primera de ellas pasa por el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

2. Comprueba si las rectas r: $6x - 5y + 12 = 0$, s: $y = 6$ y t: $2x + 5y - 36 = 0$ pasan por un mismo punto y, en caso positivo, calcula las coordenadas de dicho punto.

3. Estudia, según los distintos valores del parámetro λ, las posiciones relativas de las siguientes rectas del plano:

$(\lambda - 1)x - 2\lambda y = 11$; $\lambda x - (5\lambda - 2)\, y = 6$

4. Halla las coordenadas del extremo B de un segmento AB sabiendo que las coordenadas de A son $(2, -2)$ y que el punto $P(-4, 1)$ está situado en el interior de dicho segmento y de tal forma que lo divide en dos partes cuyas longitudes son proporcionales a 3 y 2.

5. Estudia, según los diferentes valores del parámetro a, la posición relativa de los puntos $A(3a, 2)$, $B(6a, -2)$ y $C(-3, 3a + 2)$; es decir, indica en qué casos dichos puntos son los vértices de un triángulo y en qué casos están alineados.

6. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos $A(3, 2)$ y $B(4, 0)$. Calcula las coordenadas de los otros dos vértices sabiendo que las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto $T\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

7. El paralelogramo ABCD verifica que tres de sus vértices tienen por coordenadas $A(4, 3)$, $B(5, 0)$ y $C(-1, -2)$:

a) Calcula las coordenadas del cuarto vértice D.

b) Demuestra que se trata de un rectángulo.

c) Dado el punto $P(2, 1)$, calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ y $\overrightarrow{PD}$, así como sus respectivos módulos.

d) Demuestra que la suma de los cuadrados de las distancias que separan a P de A y de C coincide con la suma de los cuadrados de las distancias que separan a P de B y de D.

8. Consideramos el cuadrilátero de vértices $A(-1, 2)$, $B(7, 4)$, $C(9, -6)$ y $D(-3, -4)$:

a) Escribe las coordenadas y los módulos de los vectores diagonales $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

b) Escribe las coordenadas de los vértices del cuadrilátero que se forma al unir por los puntos medios M, N, P y Q de los lados del anterior.

c) Demuestra que el nuevo cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.

d) Calcula las coordenadas y los módulos de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NP}$.

e) Demuestra que el perímetro del rectángulo MNPQ coincide con la suma de las longitudes de las diagonales del rectángulo ABCD.

SOLUCIONES

1. Se resuelve el sistema de ecuaciones y obtenemos el punto de intersección P(2, 2).

Obligamos a que las ecuaciones tengan la misma pendiente y a que r pase por P:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a} = \dfrac{b}{4} \\ 6 - 2 = 2a \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = \frac{12}{a} = \frac{12}{2} = 6$$

2. $\begin{cases} 6x - 5y + 12 = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 6 \Rightarrow P(3, 6)$

Comprobamos si P verifica la tercera ecuación:

$2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 - 36 = 6 + 30 - 36 = 0 \Rightarrow$

Las tres rectas se cortan en el punto P.

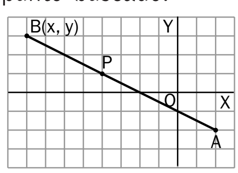
3. Las pendientes de las rectas son:

$$m_1 = \frac{\lambda - 1}{2\lambda} \text{ y } m_2 = \frac{\lambda}{5\lambda - 2}$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{\lambda - 1}{2\lambda} = \frac{\lambda}{5\lambda - 2} \Rightarrow 3\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \Rightarrow \text{las rectas son paralelas} \\ \lambda = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \text{las rectas son paralelas} \\ \lambda \neq 2 \text{ y } \lambda \neq \dfrac{1}{3} \text{ las rectas son secantes} \end{cases}$$

4. Sea B(x, y) el punto buscado.



Se debe verificar que:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PB}$$

$$(-6, 3) = \left(\frac{3(x + 4)}{2}, \frac{3(y - 1)}{2}\right)$$

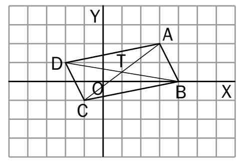
$$\begin{cases} 3x + 12 = -12 \Rightarrow x = -8 \\ 3y - 3 = 6 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-8, 3)$$

5. Para que los puntos A, B y C estén alineados se debe verificar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean proporcionales.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (3a, -4) \\ \overrightarrow{AC} &= (-3 - 3a, 3a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3a}{-3 - 3a} = \frac{-4}{3a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a^2 - 12a - 12 = 0 = \begin{cases} a = 2 \\ a = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

6. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Por tanto, T es el punto medio del segmento de extremos D y B.



Sea D(x, y):

$$\frac{4 + x}{2} = 1;\ \frac{0 + y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -2;\ y = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow D(-2, 1)$

T es el punto medio del segmento de extremos C y A.

Sea C(x, y):

$$\frac{3 + x}{2} = 1;\ \frac{2 + y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1;\ y = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow C(-1, -1)$

7. a) Las diagonales se cortan en el punto M:

$$M = \left(\frac{4 - 1}{2}, \frac{3 - 2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Sea $D(x, y) \Rightarrow \dfrac{5 + x}{2} = \dfrac{3}{2};\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow D(-2, 1)$

b) Los vectores $\overrightarrow{AD} = (-6, -2)$ y $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$ son ortogonales, ya que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -6 + 6 = 0$.

Por tanto, el paralelogramo es un rectángulo.

c) $\overrightarrow{PA} = (2, 2)$ $\quad |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{PB} = (3, -1)$ $\quad |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{PC} = (-3, -3)$ $\quad |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{PD} = (-4, 0)$ $\quad |\overrightarrow{PD}| = \sqrt{16} = 4$

d) $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 = 8 + 18 = 26$

$|\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 = 10 + 16 = 2$

8. a) $\overrightarrow{AC} = (10, -8)$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164}$

$\overrightarrow{BD} = (-10, -8)$

$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164}$

b) M(3, 3), N(8, −1), P(3, −5), Q(−2, −1)

c) $\overrightarrow{MN} = (5, -4) = \overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QM} = (5, 4) = \overrightarrow{PN}$

d) $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

$|\overrightarrow{NP}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

e) Perímetro de $MNPQ = 4\sqrt{41} = 2\sqrt{164} = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}|$