7 Los vectores en el plano

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(5, -3) + (-3, -1)$

b) $(-2, 4) + (-1)\,[(2, -1) + (-1)\,(-3, -4)]$

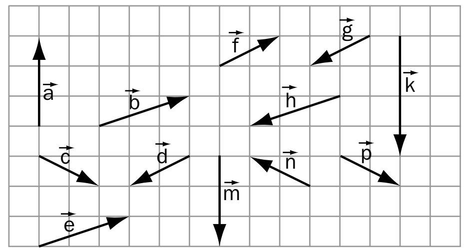
c) $(-2)\,(3, -3) + 3\,(-3, 3) + (1, 0)$

d) $(1, 2) + (-2)\,(3, 4) + (-3)\,(5, -6)$

e) $3[2(-2, 3) + (-2)\,(3, -4)] + (-1, -2)$

f) $\frac{1}{2}\,(-1, 3) + (-2)\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

2. Dados los vectores de la figura, decide cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

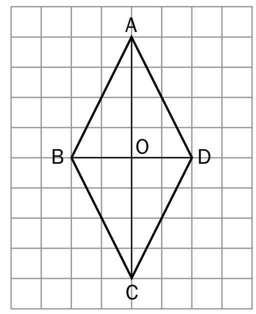


$\vec{a} = \vec{m}$ $\quad\vec{m} = -\vec{k}$ $\quad\vec{b} = -\vec{h}$

$\vec{b} = \vec{e}$ $\quad\vec{f} = -\vec{g}$ $\quad\vec{g} = \vec{d}$

$\vec{c} = -\vec{n}$ $\quad\vec{c} = -\vec{p}$ $\quad\vec{n} = \vec{p}$

3. Dado el rombo de vértices ABCD, completa las siguientes igualdades:



Ejemplo: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-2, -4) + (2, -4) = (0, -8) = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

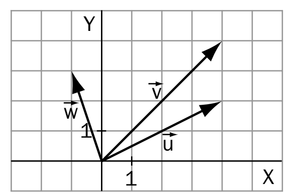
4. Calcula el producto escalar de los siguientes vectores:

a) $\vec{u} = (3, 4)$, $\vec{v} = (2, 5)$

b) $\vec{u} = (-2, 4)$, $\vec{v} = (2, -1)$

c) $\vec{u} = (-3, -4)$, $\vec{v} = (2, 0)$

5. Dados los vectores de la figura, calcula el valor de las siguientes operaciones:



a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

c) $\vec{u} \cdot (2\vec{v} + 3\vec{w}) - \vec{w} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$

6. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

a) $\vec{u} = (3, 4)$

b) $\vec{v} = (-6, 8)$

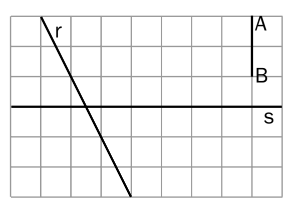
c) $\vec{w} = (-24, -32)$

7. Consideramos los vectores $\vec{u} = (2, -2)$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Dibújalos y calcula el ángulo que forman.

8. Calcula un vector unitario $\vec{y}$ que tenga la misma dirección que el vector $\vec{u} = (16, -30)$.

9. Calcula un vector unitario $\vec{y}$ que sea ortogonal al vector $\vec{u} = (15, -8)$.

10. Dadas las rectas r y s y el segmento AB de la figura, traza otro segmento CD de la misma longitud que AB y paralelo a él y tal que el punto C pertenezca a la recta s y el punto D a la r.



SOLUCIONES

1. a) $(2, -4)$ d) $(-20, 12)$

b) $(-7, 1)$ e) $(-31, 40)$

c) $(-14, 15)$ f) $\left(-\frac{7}{6}, \frac{5}{2}\right)$

2. $\vec{a} = \vec{m}$ falsa, ya que no tienen el mismo sentido.
$\vec{b} = \vec{e}$ verdadera.
$\vec{c} = -\vec{n}$ verdadera.
$\vec{m} = -\vec{k}$ falsa, ya que no tienen el mismo módulo.
$\vec{f} = -\vec{g}$ verdadera.
$\vec{c} = -\vec{p}$ falsa, ya que no tienen el mismo sentido.
$\vec{b} = -\vec{h}$ verdadera.
$\vec{g} = \vec{d}$ verdadera.
$\vec{n} = \vec{p}$ falsa, ya que no tienen el mismo sentido.

3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = (-2, -4) + (2, 0) = (0, -4) = \overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = (0, -4) + (2, 4) = (2, 0) = \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (0, 8) + (-2, -4) = (-2, 4) = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (2, -4) + (2, 4) = (4, 0) = \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = (2, 0) + (-2, -4) = (0, -4) = \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = (2, 4) + (-2, -4) = (0, 0) = \vec{0}$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = (-2, 0) + (2, 0) = (0, 0) = \vec{0}$

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = (2, 4) + (-2, 4) + (-2, -4) =$
$= (-2, 4) = \overrightarrow{CB}$

4. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (2, 5) = 6 + 20 = 26$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2, 4) \cdot (2, -1) = -4 - 4 = -8$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -4) \cdot (2, 0) = -6 + 0 = -6$

5. $\vec{u} = (4, 2)$ $\vec{v} = (4, 4)$ $\vec{w} = (-1, 3)$

a) $(4, 2) \cdot (4, 4) + (4, 2) \cdot (-1, 3) =$
$= 16 + 8 - 4 + 6 = 26$

b) $(4, 2) \cdot (3, 7) - (-1, 3) \cdot (0, -2) =$
$= 12 + 14 + 6 = 32$

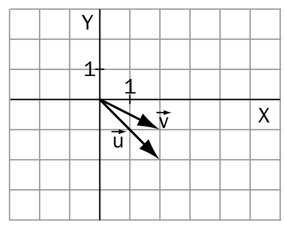
c) $(4, 2) \cdot (5, 13) - (-1, 3) \cdot (4, -2) =$
$= 20 + 26 + 4 + 6 = 56$

6. a) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{(-24)^2 + (-32)^2} = \sqrt{1\,600} = 40$

7.



$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{4 + 2}{\sqrt{4 + 4}\sqrt{4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{40}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 18{,}43... \approx 18°26'6''$

8. Para obtener un vector en la dirección de $\vec{u}$ y que sea unitario, basta dividir $\vec{u}$ por su módulo:

$$\vec{y} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{16}{\sqrt{16^2 + (-30)^2}}, \frac{-30}{\sqrt{16^2 + (-30)^2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{16}{34}, -\frac{30}{34}\right) = \left(\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right)$$

9. Un vector ortogonal al vector $\vec{u} = (15, -8)$ es $\vec{v} = (8, 15)$ ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 120 - 120 = 0$.

Para obtener un vector en la dirección de $\vec{v}$ y que sea unitario, basta dividir $\vec{v}$ por su módulo:

$$\vec{y} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{8}{\sqrt{8^2 + 15^2}}, \frac{15}{\sqrt{8^2 + 15^2}}\right) = \left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$$

10. Se traslada la recta s según el vector $\overrightarrow{AB}$.

La intersección de dicha recta con la r da el extremo D del segmento buscado.

El otro extremo, C, se obtiene como traslación del punto D según el vector guía $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.