3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando el método de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 5x - 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 2y = -23 \\ -2x + 4y = -10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 3y = 15 \\ -5x - y = 27 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - 3y = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{2y}{5} = \dfrac{21}{60} \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas utilizando el método de Cramer:

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 14 \\ -2x + y - 2z = -10 \\ 3x - 2y + 5z = 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 30 \\ -3x + y - 5z = -33 \\ -x - y + 3z = 15 \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ x - 4y + z = 11 \\ x + 3y - 2z = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 4 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 7 \end{cases}$

4. Aplicando el teorema de Rouché, estudia la compatibilidad de cada uno de los siguientes sistemas e indica las soluciones en los casos en que existan:

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ -3x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ -x - y + 15z = -40 \end{cases}$

5. En un centro educativo se ofertan para los alumnos del segundo curso de Bachillerato las materias optativas de Tecnología de la Información, Francés y Geología; cada alumno debe cursar dos y solo dos de estas materias. Se sabe que en una clase, en la que hay un total de 35 alumnos, 28 estudian Tecnología de la Información y 15 estudian Francés.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que permita averiguar cuántos alumnos de ese grupo estudian Tecnología de la Información y Francés, cuántos estudian Tecnología de la Información y Geología y cuántos estudian Francés y Geología.

b) Indica el número de alumnos que estudian Geología.

6. Elena compró cuatro lapiceros y seis gomas de borrar y pagó 1,60 euros; Javier compró cinco lapiceros y tres bolígrafos y pagó 2,45 euros, y Julio pagó 1,30 euros por cinco gomas de borrar y dos bolígrafos.

a) Averigua el precio de cada uno de los materiales de papelería mencionados.

b) ¿Cuánto deberá pagar Ana por cinco lapiceros, cinco gomas de borrar y diez bolígrafos?

7. a) Calcula el valor de a para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible indeterminado y expresa, para este valor, sus infinitas soluciones con ayuda de un parámetro.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 15 \\ x - 2y + z = 11 \\ x - z = a \end{cases}$$

b) ¿Existe algún valor real de a para el cual el sistema anterior sea compatible determinado?

SOLUCIONES

1. a) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}} = 2 \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}} = -1$

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -23 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = -3 \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -23 \\ -2 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = -4$

c) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 27 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}} = -6 \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 15 \\ -5 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}} = 3$

d) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & -3 \\ \frac{21}{60} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}} = \dfrac{7}{74} \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{21}{60} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}} = -\dfrac{28}{37}$

2. a) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 14 & -2 & 3 \\ -10 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}} = 1 \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ -2 & -10 & -2 \\ 3 & 22 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}} = -2$

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 14 \\ -2 & 1 & -10 \\ 3 & -2 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}} = 3$

b) $x = 1, \quad y = 0, \quad z = -2$

c) $x = 2, \quad y = -2, \quad z = 5$

3. a) $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ \quad -y + z = 4 \\ \qquad 4z = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -2, z = 2$

b) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 4 \\ \quad 7y - z = -8 \\ \qquad 29z = 29 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = -1, z = 1$

4. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

rango M = rango $M^* = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

La solución única es: $x = -2$, $y = 1$, $z = -3$

b) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 15 & -40 \end{pmatrix}$

rango $M = 2$, rango $M^* = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

5. a) Sea x el número de alumnos que estudian Tecnología de la Información y Francés, y el número de alumnos que estudian Tecnología de la Información y Geología, y z el número de alumnos que estudian Francés y Geología.

$\begin{cases} x + y + z = 35 \\ x + y = 28 \\ x + z = 15 \end{cases} \Rightarrow x = 8,\ y = 20,\ z = 7$

b) El número de alumnos que estudian Geología es: $y + z = 27$

6. a) Sea x el precio de cada lapicero, y el de cada goma de borrar y z el de cada bolígrafo.

$\begin{cases} 4x + 6y = 1{,}60 \\ 5x + 3z = 2{,}45 \\ 5y + 2z = 1{,}30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}25 \\ y = 0{,}10 \\ z = 0{,}40 \end{cases}$

b) Ana debe pagar:
$5 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}10 + 10 \cdot 0{,}40 = 5{,}75$ euros

7. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 15 \\ 1 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$

rango $M = 2 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado cuando el rango de M^* también es 2, y para ello se debe verificar que:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 11 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = -3$

Las infinitas soluciones se pueden expresar de la forma:
$x = -3 + t,\ y = -7 + t,\ z = t$

b) Es imposible, ya que el rango de M es siempre 2.

3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Estudia, según los diferentes valores del parámetro a, la compatibilidad o incompatibilidad del siguiente sistema y resuélvelo en los casos en que sea posible:
$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 6 + a \\ y + z = 6 \\ 3x + y - z = 17 \\ 2y - z = a \end{cases}$$

2. Estudia, según los diferentes valores del parámetro a, el tipo de compatibilidad del siguiente sistema homogéneo y escribe todas sus soluciones en cada caso:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + ay - z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x + 2ay + z = 0 \end{cases}$$

3. Estudia para qué valores de a y de b el siguiente sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} abx - ay + a^2z = 1 \\ -bx + 2y - az = 2 \\ b^2x - by + 3abz = 3 \end{cases}$$

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} ax - 3y + z = -10 \\ -x + ay + z = 3 \\ -3x + y + 2z = 1 \\ -y - 2z = 2 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuélvelo para el valor $a = 2$.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 11 & 5 \\ -3 & 8 & 3 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$ siendo I la matriz identidad.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = 2X$ siendo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

6. Tres caños diferentes surten de agua a un estanque. El primero y el segundo juntos tardan 63 horas en llenarlo; el primero y el tercero juntos tardan 70 horas en realizar la misma operación, mientras que el segundo y el tercero tardan 90 horas.

a) Calcula el tiempo que tardarán en llenar el estanque cada uno de los caños por separado.

b) Calcula el tiempo que se tardaría en llenar el estanque si funcionan los tres caños a la vez.

7. Se considera el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, del cual sabemos que cumple las siguientes condiciones:

i) Es divisible por $x - 1$.

ii) Si se divide dicho polinomio entre $x + 2$, se obtiene de resto -9.

iii) Si se divide dicho polinomio entre $x - 2$, se obtiene de resto 11.

Calcula el valor de los coeficientes indeterminados a, b y c.

SOLUCIONES

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 6+a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 6+a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & a \end{vmatrix} = 2\cdot(a-6)$$

- $a \neq 6 \Rightarrow$ rango$(M^*) = 4 \Rightarrow$ rango$(M) \neq$ rango$(M^*) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.
- $a = 6 \Rightarrow$ rango (M) = *rango* $(M^*) = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

Resolviéndolo se obtiene la única solución: $x = 5,\ y = 4,\ z = 2$

2. $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2a - 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2a & 1 \end{vmatrix} = 4a + 8$$

- $a \neq -2 \Rightarrow$ rango $(M) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
  La única solución es $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
- $a = -2 \Rightarrow$ rango $(M) = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Resolviéndolo, se obtienen las infinitas soluciones: $x = 3t,\ y = 2t,\ z = 2t$, siendo t cualquier número real.

3. $\begin{vmatrix} ab & -a & a^2 \\ -b & 2 & -a \\ b^2 & -b & 3ab \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -b & 3b \end{vmatrix} =$

$$= a^2b^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2a^2b^2$$

El sistema tiene una única solución, excepto para $a = 0$ o $b = 0$.

4. a) $\begin{vmatrix} a & -3 & 1 & -10 \\ -1 & a & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(a-2)\cdot(2a-15)$

- $a = 2$; rango(M) = rango$(M^*) = 3 \Rightarrow$ Compatible determinado.
- $a = 7{,}5$; rango(M) = rango$(M^*) = 3 \Rightarrow$ Compatible determinado.
- $a \neq 2$ y $a \neq 7{,}5$; rango$(M) = 3$, rango $(M^*) = 4$ $\Rightarrow$ Incompatible.

b) Si $a = 2$
$x = -1,\ y = 2,\ z = -2$

5.
a) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 11 & 5 \\ -3 & 8-\lambda & 3 \\ 3 & -7 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (\lambda + 1)\cdot(1 - \lambda)\cdot(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = -1,\ \lambda = 1,\ \lambda = 2$

b) Sistema compatible indeterminado, las infinitas soluciones son:
$x = t,\ y = t,\ z = -t$

6. a) Si el primero tarda x horas, el segundo y horas y el tercero z horas, en una sola hora cada uno de ellos llenaría $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ y $\frac{1}{z}$ del estanque, respectivamente. Se plantea el sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{63} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{70} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{90} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 105 \text{ horas} \\ y = 147{,}5 \text{ horas} \\ z = 210 \text{ horas} \end{cases}$$

b) $\dfrac{1}{\frac{1}{105} + \frac{1}{157{,}5} + \frac{1}{210}} \approx 48$ horas y 28 minutos

7. $\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-2) = -9 \\ P(2) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1,\ b = 1$ y $c = -3$