MATEMATICAS. BC2 TEMA 5: Vectores en R^3

1. Siendo $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 1)$, demostrar que dichos vectores son linealmente independientes y expresa el vector $\vec{m} = (1, 2, 3)$ como combinación lineal de dichos vectores.

2. Determinar el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{x} = k\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $\vec{y} = -\vec{u} + k\vec{v} + \vec{w}$ sean: a) Ortogonales b) Paralelos

3. Dados los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 1) y C(1, 6, a), se pide:
   a) Hallar para qué valores del parámetro *a* están alineados.
   b) Hallar si existen valores de *a* para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

4. Hallar dos vectores de módulo la unidad y ortogonales a (2, −2, 3) y (3, −3, 2).

5. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar:
   a) Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
   b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
   c) Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
   d) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

6. Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 2, 1)$.

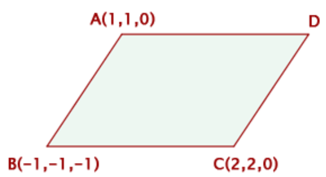
7. Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, hallar el producto $\vec{u} \times \vec{v}$ y comprobar que este vector es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Hallar el vector $\vec{v} \times \vec{u}$ y compararlo con $\vec{u} \times \vec{v}$.

8. Calcular el producto mixto: $\left[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w} \times \vec{u}\right]$

9. Dados los vectores $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ y $\vec{w} = (-1, -1, 0)$, hallar el producto mixto $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]$. ¿Cuánto vale el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados?

10. Sean A (−3, 4, 0), B (3, 6, 3) y C (−1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:
    a) Calcular el coseno de cada uno de los tres ángulos del triángulo.
    b) Calcular el área del triángulo.

11. Considerar la siguiente figura. Se pide:



    a) D para qué ABCD sea un paralelogramo.
    b) Área de este paralelogramo.

12. Dados los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 1) y C(1, 6, a), se pide:
    a) Hallar para qué valores del parámetro *a* están alineados.
    b) Hallar si existen valores de *a* para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

SOLUCIONES

Ejercicio 1.-

$\vec{u}$= (1, 0, 1), $\vec{v}$= (1, 1, 0) y $\vec{w}$= (0, 1, 1), demostrar que dichos vectores son linealmente independientes y expresa el vector $\vec{m}$= (1, 2, 3) como combinación lineal de dichos vectores.

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ $\quad a(1,0,1)+b(1,1,0)+c(0,1,1)=(0,0,0)$

$(a+b, b+c, a+c)=(0,0,0)$ $\quad \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

El sistema admite únicamente la solución trivial:

$a=0$ $\quad b=0$ $\quad c=0$

Por tanto, los tres vectores son linealmente independientes.

$\vec{m} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ $\quad (1,2,3)=x(1,0,1)+y(1,1,0)+z(0,1,1)$

$(1,2,3)=(x+y, y+z, x+z)$ $\quad \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+z=3 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} 2x+2y+2z=6 \\ x+y+z=3 \end{matrix}$

Sumamos miembro a miembro las tres ecuaciones y a la ecuación obtenida se le resta cada una de las ecuaciones.

$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+y+z=3 \\ y+z=2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+z=3 \end{cases}$

$z=2$ $\quad x=1$ $\quad y=0$ $\quad \vec{m} = \vec{u} + 2\vec{w}$

Ejercicio 2.-

a) Ortogonales: Para que los vectores sean ortogonales su producto escalar tiene que ser igual a cero.

$\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ $\quad \vec{x}\cdot\vec{y}=(k\vec{u}-2\vec{v}+3\vec{w})(-\vec{u}+k\vec{v}+\vec{w})=-k-2k+3$ $\quad -3k+3=0$ $\quad k=1$

b) Paralelos: Para qué dos vectores sean paralelos, sus componentes tienen que ser proporcionales.

$\frac{k}{-1}=\frac{-2}{k}=\frac{3}{1}$ $\quad \begin{cases} k^2=2 \\ k=-3 \end{cases}$ El sistema no admite solución. No es posible.

Ejercicio 3.-

a) Si A, B y C están alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen la misma dirección, por lo que son linealmente dependientes y tienen sus componentes proporcionales.

$\overrightarrow{AB}=(1-1, 1-0, 1-1)=(0,1,0)$ $\quad \overrightarrow{AC}=(1-1, 6-0, a-1)=(0,6,a-1)$

$(0,6,a-1)=k(0,1,0)$ $\quad a-1=0$ $\quad a=1$

b)

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & a-1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\vec{k}=(a-1)\vec{i}$$

$A=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=3$ $\quad 3=\sqrt{(a-1)^2+0^2+0^2}$ $\quad 9=(a-1)^2$

$a-1=3$ $\quad a=4$ $\quad C(1,6,4)$ $\quad a-1=-3$ $\quad a=-2$ $\quad C(1,6,-2)$

Ejercicio 4.-

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}\vec{k} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 0} = 5\sqrt{2}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{5}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \vec{v} = \left(\frac{-5}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Ejercicio 5.-

a) Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$$

b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

c) Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}$$

$$\vec{w} = \left(\frac{7}{\sqrt{294}}, \frac{-14}{\sqrt{294}}, \frac{7}{\sqrt{294}}\right)$$

d) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{294}\, u^2$$

Ejercicio 6.-

$$\cos\alpha = \frac{2+2-1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+4+1}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54.74°$$

Ejercicio 7.-

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \qquad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \qquad (2, -1, -7) \cdot (3, -1, 1) = 6 + 1 - 7 = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \qquad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \qquad (2, -1, -7) \cdot (2, -3, 1) = 4 + 3 - 7 = 0$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$$

Ejercicio 8.-

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \qquad \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{w} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \qquad (\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{w} \times \vec{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w} \times \vec{u}] = (-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})(-2\vec{i} - 2\vec{j}) = 4$$

Ejercicio 9.-

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \qquad V = 6u^3$$

Ejercicio 10.-

$$\overrightarrow{AB} = (3+3, 6-4, 3-0) = (6,2,3) \qquad \overrightarrow{BA} = (-6,-2,-3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1+3, 2-4, 1-0) = (2,-2,1) \qquad \overrightarrow{CA} = (-2,2,-1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1-3, 2-6, 1-3) = (-4,-4,-2) \qquad \overrightarrow{CB} = (4,4,2)$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{12-4+3}{\sqrt{36+4+9}\,\sqrt{4+4+1}} = \frac{11}{21} \qquad \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{24+8+6}{\sqrt{36+4+9}\,\sqrt{16+16+4}} = \frac{38}{21}$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{-8+8-2}{\sqrt{4+4+1}\,\sqrt{16+16+4}} = \frac{-1}{9} \qquad A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{k} = -4\vec{i} - 16\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \sqrt{16+256} = 4\sqrt{17}$$

Ejercicio 11.-

a) Por ser la figura un paralelogramo, los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son equipolentes.

$$(x-1, y-1, z) = (2+1, 2+1, 1)$$

$$x - 1 = 3 \qquad x = 4 \quad y - 1 = 3 \qquad y = 4 \qquad z = 1 \quad D(4,4,1)$$

b) El área es $A = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right|$ $\qquad \overrightarrow{BC} = (3,3,1) \qquad \overrightarrow{BA} = (2,2,1)$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$A = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}\,u^2$$

Ejercicio 12.-

a) Si A, B y C están alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen la misma dirección, por lo que son linealmente dependientes y tienen sus componentes proporcionales.

$$\overrightarrow{AB} = (1-1, 1-0, 1-1) = (0,1,0) \qquad \overrightarrow{AC} = (1-1, 6-0, a-1) = (0,6,a-1)$$

$$(0,6,a-1) = k\,(0,1,0) \qquad a - 1 = 0 \qquad a = 1$$

b) El módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es igual al área del paralelogramo construido sobre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & a-1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\vec{k} = (a-1)\vec{i}$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 3 \qquad 3 = \sqrt{(a-1)^2 + 0^2 + 0^2} \qquad 9 = (a-1)^2$$

$$a - 1 = 3 \qquad a = 4 \qquad C(1,6,4)$$

$$a - 1 = -3 \qquad a = -2 \qquad C(1,6,-2)$$