ACTIVIDADES DE REFUERZO

6 Ecuaciones de rectas y planos

1. En cada uno de los siguientes casos calcula las coordenadas del vector libre, sabiendo que uno de sus representantes fijos tiene por origen el punto A y por extremo el punto B:

a) $A(2, 3, -1)$ y $B(4, 5, 2)$

b) $A(-1, 2, 0)$ y $B(4, -3, -2)$

2. a) Del vector $\overrightarrow{PQ} = (5, 3, -1)$ se sabe que $P(-1, 2, 3)$. Calcula las coordenadas del extremo Q.

b) Del vector $\overrightarrow{RS} = (-1, 3, -2)$ se sabe que $S(-2, 8, -1)$. Calcula las coordenadas del origen R.

3. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos $A(2, 3, -2)$ y $B(-4, 3, -2)$.

4. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta r que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto $A(-1, 3, -2)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (-3, -2, 4)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 2, 4)$ y $B(-3, 4, -7)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y su dirección es perpendicular a la de los vectores $\vec{u} = (-1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 5)$.

5. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano α que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto $A(1, 2, -2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 3)$ y $C(-1, 2, 3)$.

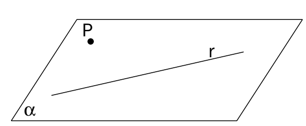
c) Pasa por el punto $A(-3, -2, 1)$ y uno de sus vectores normales es el $\vec{n} = (1, -2, -3)$.

6. Decide, en cada uno de los siguientes casos, si los puntos A, B y C están alineados o forman triángulo:

a) $A(1, 3, -1)$, $B(-1, 4, -3)$, $C(3, 2, 1)$

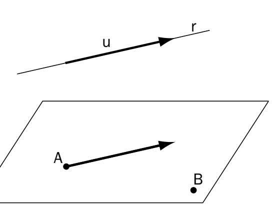
b) $A(1, 2, -2)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 4, -4)$

7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1, 1, 2)$ y contiene a la recta dada por la ecuación $r\colon \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{-1} = z$



8. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(-3, 2, 0)$ y $B(1, 0, -1)$ y que es paralelo a la recta que tiene por ecuaciones paramétricas

$$r\colon \begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$



9. Calcula el valor de m para que los puntos del espacio $A(-1, m-1, 0)$, $B(0, m+2, 1)$ y $C(1, 5, 2)$ pertenezcan a una misma recta.

10. Calcula todos los valores de m que hacen que los puntos del espacio $A(0, 2, 2)$, $B(1, 1, m^2-1)$ y $C(2, 0, 2m)$ pertenezcan a una misma recta.

SOLUCIONES

1. a) $\overrightarrow{AB} = (4 - 2, 5 - 3, 2 + 1) = (2, 2, 3)$

b) $\overrightarrow{AB} = (4 + 1, -3 - 2, -2 + 0) = (5, -5, -2)$

2. a) $\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{q} = (-1, 2, 3) + (5, 3, -1) = (4, 5, 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow Q\,(4, 5, 2)$

b) $\vec{r} = \vec{s} - \overrightarrow{RS} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{r} = (-2, 8, -1) - (-1, 3, -2) = (-1, 5, 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow R\,(-1, 5, 1)$

3.
$$\left.\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{2}(2 - 4) = -1 \\ y_m &= \frac{1}{2}(3 + 3) = 3 \\ z_m &= \frac{1}{2}(-2 - 2) = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(-1, 3, -2)$$

4. a) $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 4t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y - 3}{-2} = \dfrac{z + 2}{4}$

b) Un vector director es $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, -11) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 - 11t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x + 1}{-2} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{-11}$$

c) Un vector director es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 + 5t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \frac{x + 3}{4} = \frac{y - 4}{5} = \frac{z}{2}$$

5. a) $\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x - 2y + 3z + 6 = 0$

b) $\det(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x + 1 & y - 2 & z + 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$$

c) El plano pedido es de la forma:
$x - 2y - 3z + D = 0$

Como debe pasar por A: $-3 + 4 - 3 + D = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 2 \Rightarrow x - 2y - 3z + 2 = 0$

6. A, B y C están alineados $\Rightarrow$ rango $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$

a) rango $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A$, B y C están alineados.

b) rango $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A$, B y C forman triángulo.

7. La recta r pasa por $A\,(1, 2, 0)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (2, 1, -1)$

El plano pedido es el determinado por $\alpha\,(A, \vec{u}, \overrightarrow{AP})$

Entonces: $\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \overrightarrow{AP}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

8. La recta r tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (1, 1, -1)$.

El plano pedido será el determinado por $\alpha\,(A, \vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

Entonces: $\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x + y + 2z = 0$

9. A, B y C están alineados $\Rightarrow$ rango $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$

rango $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 - m & 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6 - m} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 - m = 6 \Rightarrow m = 0$

10. A, B y C están alineados $\Rightarrow$ rango $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$

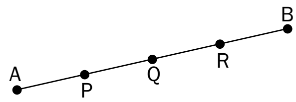
rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & m^2 - 3 \\ 2 & -2 & 2m - 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{m^2 - 3}{2m - 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$

6 Ecuaciones de rectas y planos

1. Un plano contiene el punto $P(2, 0, -2)$ y la recta r: $x - 1 = y = z$. Calcula el valor de m que hace que el vector $\vec{n}$ $(m, -m - 2, 2)$ sea un vector normal a dicho plano.

2. Dado el segmento de extremos $A(-3, 4, 4)$ y $B(1, 12, 0)$, calcula las coordenadas de tres puntos P, Q y R tales que dividan al segmento en cuatro partes iguales.



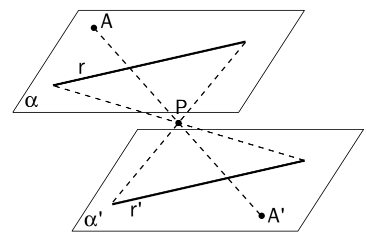
3. Dado el segmento de extremos $A(1, 2, -3)$ y $B(-4, 12, 2)$, calcula las coordenadas de un punto interior a dicho segmento de manera que las distancias que lo separan de los extremos A y B estén en la relación de 2 a 5.

4. Se considera el punto P de coordenadas $P(-2, 1, 0)$:

a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(2, 1, 3)$ respecto de P.

b) Escribe las ecuaciones de la recta simétrica de r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -2 - t \end{cases}$ respecto de P.

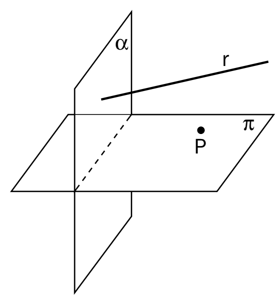
c) Escribe la ecuación del plano simétrico de α: $x - 11y + 2z + 3 = 0$ respecto de P.



5. Se considera el punto $P(-1, 3, 0)$, la recta r: $\dfrac{x - 1}{2} = y = z$ y el plano α: $x + y - z + 3 = 0$:

a) Calcula un vector de dirección de r y un vector normal a α.

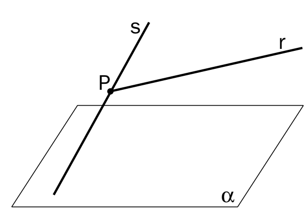
b) Halla la ecuación del plano π que contiene a P, es paralelo a r y perpendicular a α.



6. Halla unas ecuaciones paramétricas para el plano α: $x - y + 1 = 0$.

7. Determina la ecuación en forma continua de la recta que es paralela al plano α: $2x - y - z - 4 = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta

s: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t + 1 \\ z = -t \end{cases}$ en el punto $P(0, 3, -2)$.



8. Tres vértices de una de las caras de un paralelepípedo son los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(0, 2, 1)$ y $C(3, 2, -5)$.

a) Calcula las coordenadas del cuarto vértice D de la cara considerada sabiendo que A y C son vértices opuestos.

b) Sabiendo que todas las diagonales de paralelepípedo se cortan en el punto $M(1, 4, 1)$, calcula las coordenadas de los otros cuatro vértices de la figura.

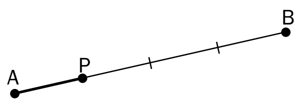
SOLUCIONES

1. Como se ve, el punto P no pertenece a la recta r. Por tanto, si se toman dos puntos de r, $A(0, -1, -1)$ y $B(1, 0, 0)$, se consideran los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ y se calcula su producto vectorial, se obtiene un vector normal al plano.

$$\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{-2} = \frac{-m-2}{3} = \frac{2}{-1} \Rightarrow m = 4$$

2. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(4, 8, -4) = (1, 2, -1)$



$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = (-3, 4, 4) + (1, 2, -1) =$
$= (-2, 6, 3)$

$\vec{q} = \vec{a} + 2 \cdot \overrightarrow{AP} = (-3, 4, 4) + (2, 4, -2) =$
$= (-1, 8, 2)$

$\vec{r} = \vec{a} + 3 \cdot \overrightarrow{AP} = (-3, 4, 4) + (3, 6, -3) =$
$= (0, 10, 1)$

3. $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}(-5, 10, 5) = (-2, 4, 2)$

$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = (1, 2, -3) + (-2, 4, 2) =$
$= (-1, 6, -1)$

4. a) Sea $A'(x, y, z)$ el punto simétrico de A. P es el punto medio del segmento de extremos A y A'. Por tanto:

$$\frac{x+2}{2} = -2, \quad \frac{y+1}{2} = 1, \quad \frac{z+3}{2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A'(-6, 1, -3)$$

b) Se toman dos puntos $A(1, 0, -2)$ y $B(-1, 0, -1)$ de la recta r y se calculan sus simétricos A' y B'. La recta buscada pasa por A' y B'.

$A'(-5, 2, 2)$, $B'(-3, 2, 1)$, ya que P es el punto medio de los segmentos AA' y BB'.

$$r': \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

c) Se toman tres puntos A, B y C del plano y se calculan sus simétricos A', B' y C'. El plano que pasa por A', B' y C' es el plano buscado.

$A(1, 0, -2)$, $B(-1, 0, -1)$ y $C(2, 1, 3)$,

$A'(-5, 2, 2)$, $B'(-3, 2, 1)$ y $C'(-6, 1, -3)$, ya que P es el punto medio de los segmentos AA', BB' y CC'.

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+5 & y-2 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - 11y + 2z + 23 = 0$$

5. a) Vector director de r: $\vec{u}(2, 1, 1)$

Vector normal a α: $\vec{v}(1, 1, -1)$

b) $\pi(P, \vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi: 2x - 3y - z + 11 = 0$

6. Los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 1)$ y $C(-1, 0, 2)$ son puntos del plano.

Por tanto: $\alpha(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha: \begin{cases} x = 1 - t - 2s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = -1 + 2t + 3s \end{cases}$$

7. Los vectores de dirección de r deberán ser perpendiculares al vector $\vec{v}(-1, 1, -1)$, vector de dirección de s, y al vector $\vec{w}(2, -1, -1)$, vector normal de α. Por tanto, un vector de dirección de r es:

$$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -3, -1)$$

$\vec{u}$ es paralelo al vector $(2, 3, 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{1}$$

8. a) El punto $N(2, 2, -3)$, punto medio del segmento AC, deberá ser también punto medio del segmento BD. Por tanto, las coordenadas del vértice D son $D(4, 2, -7)$.

b) M es el punto medio de las diagonales AA', BB', CC' y DD'. Por tanto:
$A'(2, 6, 3)$, $B'(2, 6, 1)$, $C'(-1, 6, 7)$ y $D'(-2, 6, 9)$