Recuperación FINAL

BC2

Examen Matemáticas – Álgebra, Geometría y Cálculo

NOMBRE:

NOTA

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ejercicios propuestos, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +2y & +az & = & a \\ x & +ay & +2z & = & a \\ -x & +y & +z & = & 1 \end{array} \right. .$$

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

3. a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)} \right)$.

   b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2^{(x-1)} & \text{si} & x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si} & 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right. ,$$

   donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

4. a) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

5. a) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-dx}{1+e^x}$.
   (Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

   b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - 2 & = & 0 \\ y - z - 2 & = & 0 \end{array} \right.$.

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

7. Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$, $\quad s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

   a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

   b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

SOLUCIONES Máxima puntuación = 50 ptos

1 a) 4 $A^{-1} = \dfrac{[Adj(A)]^t}{|A|=-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{X = A^{-1}\cdot(BC - I)}$

6 b) $BC = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $BC - I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

2 7 a) $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$; $|A| = (a-2)\cdot(4+a) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$

$*$ Si $a=2$: $rg(A) = rg(A|B) = 2 < 3 \Rightarrow \boxed{SCI}$; $*$ Si $a \neq -4, 2 \Rightarrow \boxed{SCD}$

$*$ Si $a=-4$: $2 = rg(A) \neq rg(A|B) = 3 \Rightarrow \boxed{SI}$ 3 b) $\boxed{x=0;\ y=1-t;\ z=t}$

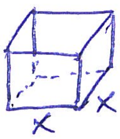
3 4 a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2x}\right) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - x}{x \operatorname{sen} 2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = (\text{L'Hôpital}) =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\cos 2x - 1}{\operatorname{sen} 2x + 2x\cos 2x} = \dfrac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$

6 b) $*$ En $x=1$: $\boxed{\text{Disc. salto } \tfrac{\text{rabo}}{2}}$

$1 = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$

$*$ En $x=2$: $0 = f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow \boxed{\text{Continua en } x=2}$

4 6 a) 

$\left.\begin{array}{l} \text{Vol} = 108\ dm^3 \\ \text{Sup} = x^2 + 4xy \end{array}\right\} \Rightarrow 108 = x^2 y \Rightarrow S(x) = x^2 + \dfrac{432}{x} \Rightarrow S'(x) = 2x - \dfrac{432}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 6$

$S''(6) > 0 \Rightarrow \boxed{x = 6\,dm;\ y = 3\,dm}$

4 b) $r \equiv \begin{cases} P = (x=1,\ y=1) \\ m = y'(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow r \equiv y - 1 = 3(x-1) \Rightarrow \boxed{r \equiv y = 3x - 2}$

5 5 a) $\displaystyle\int \frac{-dx}{1+e^x} = \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{bmatrix} = \int \frac{-dx}{t(1+t)} = -\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = -\ln|t| + \ln|1+t| =$

$= -\ln|e^x| + \ln|1+e^x| = \boxed{-x + \ln|1+e^x| + K}$

5 b) $f(x) = g(x) \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) > g(0) \Rightarrow \text{Área} = \displaystyle\int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx = \boxed{\tfrac{9}{2}\,u^2}$

6 4 a) $d(P,\pi) = \dfrac{|1+4+1-4|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}\,u}$

4 b) $A = r \cap \pi = (2,0,-2)$

$\text{Área}_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}|(-1,-1,4)\times(-2,1,3)| = \frac{1}{2}|(-7,-5,-3)| = \boxed{\dfrac{\sqrt{83}}{2}\,u^2}$

7 5 a) $r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (-2,-2,0) \\ R = (2,0,0) \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (3,-2,1) \\ S = (0,-2,1) \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2 \\ rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{RS}) = 3 \end{array}\right\}$ Las rectas se $\boxed{\text{cruzan}}$

5 b) $\pi \equiv \begin{cases} P = (-1,0,2) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (-2,-2,0) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (3,-2,1) \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x+1 & -2 & 3 \\ y & -2 & -2 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y - 5z + 11 = 0}$

Recuperación
FINAL
BC2

Examen Matemáticas – Álgebra, Geometría, Cálculo y Probabilidad

NOMBRE:

NOTA

1

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases},$$

a) donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

b) Estudia la derivabilidad de f(x)

2

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$

Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

3

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & 2y & & & = & a^2 \\ -x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & ay & - & z & = & -(4+a) \end{array}\right\}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. **(1 punto)**

4

a) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

a.1) [0,5 puntos] ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

a.2) [0,75 puntos] Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b.2) [0,75 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	k \ p	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 40 ptos.

1) f(x) es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo si acaso

6 a) en $x=1$ y $x=2$: • $x=1$: $1=f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1$

• $x=2$: $0=f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$. $\boxed{\text{f(x) es cont. en } \mathbb{R}-\{1\} \text{ con discont. salto finito de valor } 2}$

4 b) $$f'(x)=\begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } 1<x<2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

• En $\boxed{x=1 \text{ no es derivable}}$ al no ser continua

• En $x=2$: $1=f'_-(2)=f'_+(2) \Rightarrow \boxed{\text{Es derivable}}$

10 2) $r \equiv \begin{cases} 2x-2y=4 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R=(2,0,0) \\ \vec{v}_r=(2,2,0) \end{cases}$; $s \equiv \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} S=(0,-2,1) \\ \vec{v}_s=(3,-2,1) \end{cases}$

• $rg(\vec{v}_r,\vec{v}_s)=2$; • $rg(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\vec{RS})=3 \Rightarrow \boxed{\text{Las rectas se cruzan}}$

3) 6 a) $$\left.\begin{aligned} ax+2y \quad &= a^2 \\ -x+y+z &= 5 \\ x-ay-z &= -4-a \end{aligned}\right\} \quad A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & a^2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -a & -1 & -4-a \end{array}\right)$$

$|A|=a(a-1)$; • Si $a=0$: $2=rg(A)\neq rg(A|B)=3 \Rightarrow \boxed{SI}$

• Si $a=1$: $rg(A)=rg(A|B)=2<3=$ nº incógn $\Rightarrow \boxed{SCI}$

• Si $a\neq 0,1$: $rg(A)=rg(A|B)=3=$ nº incógn $\Rightarrow \boxed{SCD}$

4 b) Si $a=1$: El sistema es SCI: $\boxed{x=t;\ y=\dfrac{1-t}{2};\ z=\dfrac{9+3t}{2}}$

4) 3 a1) $p(\text{Falsa alarma})=0'6\cdot 0'03+0'3\cdot 0'02+0'1\cdot 0'01=\boxed{0'025}$

3 a2) $p(R \text{ ó } N / \text{No Falsa})=\dfrac{0'3\cdot 0'98+0'1\cdot 0'99}{1-0'025}=\boxed{0'4031}$

2 b1) $p(X\leq 2)=0'04+0'16+0'27=\boxed{0'46}$ 2 b2) $p(Y=0)=\boxed{0'3874}$

Recuperación FINAL

BC2

Examen Matemáticas – Recuperación FINAL

NOMBRE:

NOTA

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano. (0,5 puntos)

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo? (1 punto)

c) Demuestra que la función $f(x)$ anterior y $g(x) = 2x-1$ se cortan al menos en un punto. (1 punto)

2A. a) Representa gráficamente las parábolas $f(x) = x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas. (2 puntos)

3A. a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $k = 1$. (1 punto)

4A. a) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1+\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$. (1,5 puntos)

b) Encuentra la ecuación general de un plano π' perpendicular a π que contenga a r. (1 punto)

1B. La velocidad de una partícula, medida en m/sg, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide:

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0, 3]$ se alcanza la velocidad máxima? (1,25 puntos)

b) Calcula $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido. (1,25 puntos)

2B. Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + sen^2 x}\,dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = sen\, x$) (2,5 puntos)

3B. Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$. Determina los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$. (2,5 puntos)

4B. Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

a) Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por P. (1,25 puntos)

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P. (1,25 puntos)

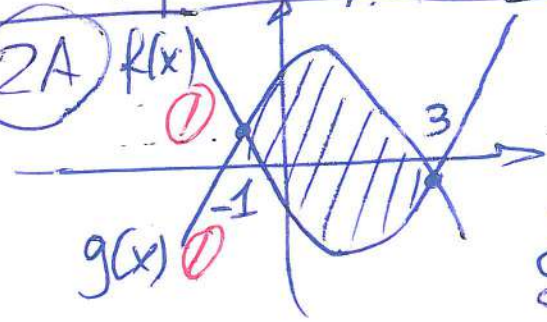
UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

SOLUCIONES Máxima puntuación = 40 ptos.

10 **(1A)** a) Ver teoría | b) No, ya que $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

c) Sea $h(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 2x + 1$, $h(x)$ es continua en $[0,1]$ al ser combinación de funciones continuas, además $f(0)\cdot f(1) = 2\cdot(-0'5) < 0$, por lo que se puede aplicar el teor. de Bolzano y $\exists c \in (0,1) / h(c) = 0$

10 **(2A)**



$f(x) = g(x)$

$x = -1,\ x = 3$

$f \to x_V = 3/2$

$g \to x_V = 1/2$

b) $\text{Área} = \displaystyle\int_{-1}^{3} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{-1}^{3} (-2x^2 + 4x + 6)\,dx = \left[-\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{4x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{3} = \boxed{\dfrac{64}{3}u^2}$

(3A)

6 a)
$$\left.\begin{array}{l} Kx + y + z = K \\ x + Ky + z = K \\ x + y + Kz = K \end{array}\right\} A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} K & 1 & 1 & K \\ 1 & K & 1 & K \\ 1 & 1 & K & K \end{array}\right), \quad \underline{|A| = (K-1)^2(K+2)}$$

* Si $K = 1$: $rg(A) = rg(A|B) = 1 \Rightarrow \boxed{SCI}$ con 2 grad. liber.
* Si $K = -2$: $2 = rg(A) \neq rg(A|B) = 3 \Rightarrow \boxed{SI}$
* Si $K \neq 1, -2$: $rg(A) = rg(A|B) = 3 = n^{\circ}$ incog $\Rightarrow \boxed{SCD}$

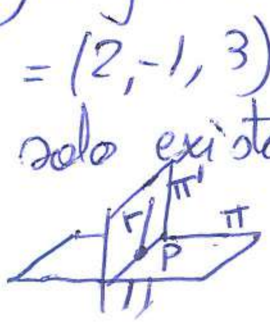
4 b) Si $K = 1$: El sistema es: $x + y + z = 1 \Rightarrow$ Sol: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$

(4A) $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

6 a) $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$

$2(-\lambda) - 0 + 3(1+\lambda) = 6 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow$ $\boxed{\pi \text{ y } r \text{ se cortan en } P = (-3, 0, 4)}$

4 b) π y r no son perpendiculares ya que $\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = (2,-1,3)\cdot(-1,0,1) = -2 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Por tanto solo existe un único plano π' tal que $\pi' \perp \pi$, $r \subset \pi'$



$\pi' \equiv \begin{cases} P = (-3,0,4) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (-1,0,1) \\ \vec{v} = \vec{n}_\pi = (2,-1,3) \end{cases} = \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 2 \\ y & 0 & -1 \\ z-4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;\ \boxed{x + 5y + z - 1 = 0}$

Recuperación FINAL

BC2

Examen Matemáticas – Recuperación FINAL

NOMBRE:

NOTA

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano. (0.5 puntos)

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo? (1 punto)

c) Demuestra que la función $f(x)$ anterior y $g(x) = 2x-1$ se cortan al menos en un punto. (1 punto)

2A. a) Representa gráficamente las parábolas $f(x) = x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$. (0.5 puntos)

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas. (2 puntos)

3A. a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} kx & + & y & + & z & = & k \\ x & + & ky & + & z & = & k \\ x & + & y & + & kz & = & k \end{array}\right.$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $k = 1$. (1 punto)

4A. a) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -\lambda \\ y & = & 0 \\ z & = & 1+\lambda \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$. (1.5 puntos)

b) Encuentra la ecuación general de un plano π' perpendicular a π que contenga a r. (1 punto)

1B. La velocidad de una partícula, medida en m/sg, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide:

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0, 3]$ se alcanza la velocidad máxima? (1,25 puntos)

b) Calcula $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido. (1,25 puntos)

2B. Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + sen^2 x}\, dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = sen\, x$) (2,5 puntos)

UCLM

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

3B. Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$. Determina los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$. (2.5 puntos)

4B. Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto $P(1,1,0)$, se pide:

a) Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por P. (1.25 puntos)

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P. (1.25 puntos)

1B $v(t)=(t^2+2t)e^{-t}$. De acuerdo con el teorema de Weierstrass en el intervalo $[0,3]$ se alcanza un máximo absoluto (al ser $v(t)$ continua), puede alcanzar dicho máximo en los extremos o en los puntos intermedios donde $v'(t)=0$; los candidatos son: $t=0$, $t=3$, $t=+\sqrt{2}$.
Con ellos: $v(0)=0$, $v(3)=0'75$; $v(+\sqrt{2})=1'17$;

5 a) La velocidad máxima en $[0,3]$ se alcanza en $\boxed{t=+\sqrt{2}}$.

5 b) $\lim_{x\to\infty} v(t) = \lim_{x\to\infty} \frac{t^2+2t}{e^t} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2t+2}{e^t} = 0$; $\boxed{\text{La partícula se acaba parando}}$

---

10 **2B** $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} t=\operatorname{sen} x \\ dt=\cos x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg}(t) = \boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)+k}$

---

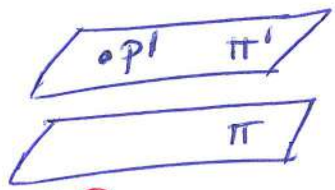
10 **3B** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$; $a,b,c\in\mathbb{R}$

- $|B|=8 \Rightarrow 2a-3b-2c+ab+2=0$
- $A\cdot B=B\cdot A \Rightarrow b+2=0$; $a+c=3$; $b=-2$;

$\boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=-2 \\ c=4 \end{matrix}}$

4B $\pi \equiv x+z=4$
$P=(1,1,0)$

a) $\pi' \equiv \begin{cases} \pi' \parallel \pi \\ P\in\pi' \end{cases}$

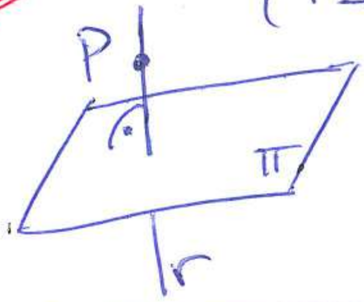


$\pi' \equiv \begin{cases} P=(1,1,0) \\ \vec{n}_{\pi'}=\vec{n}_{\pi}=(1,0,1) \end{cases}$

5 $\pi' \equiv x+z+D \overset{P\in\pi'}{=} 0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x+z-1=0}$

---

5 b) $r \equiv \begin{cases} P=(1,1,0)\in r \\ r\perp \pi \equiv x+z=4 \end{cases} \equiv \begin{cases} P=(1,1,0) \\ \vec{v}_r=\vec{n}_{\pi}=(1,0,1) \end{cases}$



$\boxed{r \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}}$

BC2
EXAMEN FINAL

Examen Matemáticas – Recuperación final del curso

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B2-2.1	Calcula determinantes hasta orden 4	EXTRA	10%	
B3-2.1	Aplicaciones de las derivadas: L'Hôpital, Tangentes, Crecimiento, Curvatura, ...	1 y 2a	30%	
B3-4.1	Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas	2b y 2c	20%	
B2-2.5	Clasifica y resuelve sistemas de ecuaciones lineales	3	25%	
B4-2.4	Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.	4	25%	

1A. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{xe^{\operatorname{sen} x}}, \qquad \lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen} x}} \qquad \textbf{(1,25 puntos cada límite)}$$

Nota: $\tan x$ denota a la tangente de x.

2A. a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x=2$. **(0,5 puntos)**
b) Esboza la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$, la recta calculada en el apartado a) y el eje de ordenadas. **(0,5 puntos)**
c) Calcula el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

3A. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. **(0,5 puntos)**
b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & 3z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & az & = & 5 \end{array}\right. \qquad a\in\mathbb{R}$$

no es incompatible para ningún valor $a\in\mathbb{R}$. **(1 punto)**
c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4A. Dada la recta

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=3 \\ x-z=1 \end{array}\right.$$

a) Da la ecuación implícita del plano π perpendicular a r que pasa por el punto $P(2,1,1)$. **(1,25 puntos)**
b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de π con los ejes coordenados. **(1,25 puntos)**

EXTRA: (1 punto)

3B. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$$

donde $x,y,z,a,b,c\in\mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

SOLUCIONES Máxima puntuación = 32 + (4 EXTRA)

1) a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x\,e^{\operatorname{sen}x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hop}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2/(1+2x)}{e^{\operatorname{sen}x}+x\cos x\,e^{\operatorname{sen}x}}=\boxed{2}$

b) $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{1/(x+\operatorname{sen}x)}=(1^{\infty})=e^{\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}(1+\operatorname{tg}x-1)\right]}$

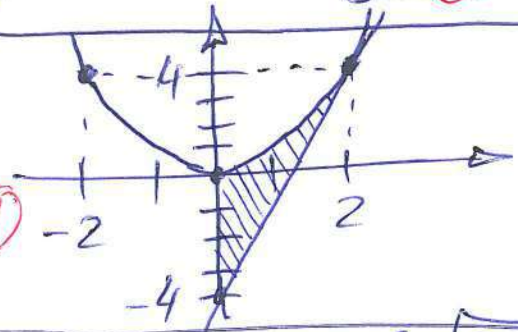
$=e^{\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right]}=e^{\left(\frac{0}{0}\right)}\overset{\text{L'Hop}}{=}e^{\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\right)\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{1+\cos x}\right)}=\boxed{e^{1/2}}$

2) a) $RT\equiv r\equiv\begin{cases}P=(2,4)\\ m=f'(2)=4\end{cases}\Rightarrow y-4=4(x-2)\Rightarrow\boxed{y=4x-4}$

b)

x	$y=x^2$
V: 0	0
2	4
−2	4

x	$y=4x-4$
0	−4
2	4



c) $\text{Área}=\int_0^2\left[x^2-(4x-4)\right]dx=\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{4x^2}{2}+4x\right]_0^2=\boxed{\dfrac{8}{3}u^2}$

3) a) $\boxed{\text{Ver Teoría}}$ b) $\left.\begin{array}{l}x+3y-3z=4\\2x-y+z=1\\3x+2y-az=5\end{array}\right\}\ A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-3&4\\2&-1&1&1\\3&2&-a&5\end{array}\right)$

$|A|=7\cdot(a-2)$

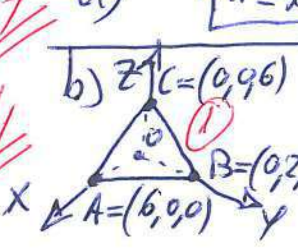
* Si $a=2$: $rg(A)=rg(A|B)=2<3=$ nº incógn $\Rightarrow\boxed{SCI}$
* Si $a\neq2$: $rg(A)=rg(A|B)=3=$ nº incógn $\Rightarrow\boxed{SCD}$

Sol: $\boxed{\text{No existe ningún valor de } a}$ para el cual es SI

c) Si $a=2$: $\left.\begin{array}{l}x+3y=4+3t\\2x-y=1-t\end{array}\right\}\ \boxed{x=1,\ y=1+t,\ z=t\ (\forall t\in\mathbb{R})}$

4) a) $\pi\equiv\begin{cases}P=(2,1,1)\\ \vec{w}=\vec{v}_r=(1,3,1)\end{cases}$

$\boxed{\pi\equiv x+3y+z-6=0}$

b) 

$\text{Vol}=\dfrac{1}{6}\left|[\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}]\right|=\dfrac{1}{6}\,6\cdot2\cdot6=\boxed{12u^3}$

EXTRA

a) $\dfrac{7}{5}\cdot\begin{vmatrix}2&2&3\\x&y&z\\a&2b&3c\end{vmatrix}+\dfrac{7}{5}\begin{vmatrix}2&2&3\\4&4&6\\a&2b&3c\end{vmatrix}=\dfrac{7}{5}\cdot10=\boxed{14}$

b) $-5\cdot3\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\a&2b&3c\\2&2&3\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)\cdot(-5)\cdot3\cdot\begin{vmatrix}2&2&3\\x&y&z\\a&2b&3c\end{vmatrix}=\boxed{-150}$

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo [-1,1]. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real. **(1 punto)**

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^2 - 1)\cos x \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2}\, dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x = t$.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & az & = & 4 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ x & + & 4y & - & 5z & = & 6 \end{array}\right\} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. **(1 punto)**

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$:
a) Calcula la distancia del punto A al plano α. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α. **(1,5 puntos)**

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3 % de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4 % de defectuosos y la C produce 800 con un 2 % de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.
a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**
a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".
b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. **(0,75 puntos)**
b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0.01	0,05	0,10	0.15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

SOLUCIONES   Máxima puntuación $= \underline{24 \text{ ptos}}$.

1 a) Ver Teoría ; $f(x) = x^{15} + x + 1$ es una función continua

4 en $[-1,1]$ al tratarse de un polinomio con $\text{sign} f(-1) \neq \text{sign} f(1)$

por lo que cumple el teorema de Bolzano $\Rightarrow \exists c \in (-1,1) / f(c) = 0$

2 b) Si cortara más de una vez debería ser $f'(c) = 0$ en $(-1,1)$

pero eso no ocurre ya que $f'(c) = 15x^{14} + 1 = 0 \Rightarrow c = \sqrt[14]{\frac{-1}{15}} \notin \mathbb{R}$

2 a) 3 $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^2-1)\cos x \, dx = \begin{bmatrix} u = x^2-1 ; \ du = 2x\,dx \\ dv = \cos x \, dx ; \ v = \operatorname{sen} x \end{bmatrix} = \cdots \simeq \boxed{7'1861}$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2} dx = \begin{bmatrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+t-2} = \int \left(\frac{1/3}{t-1} + \frac{-1/3}{t+2} \right) dt =$

3 $= \dfrac{1}{3}\left[\ln(t-1) - \ln(t+2) \right] = \dfrac{1}{3}\left[\ln(e^x-1) - \ln(e^x+2) \right] = \boxed{\dfrac{1}{3} \ln \dfrac{e^x-1}{e^x+2} + C}$

3 $\left.\begin{aligned} x + 3y - az &= 4 \\ x + ay + z &= 2 \\ x + 4y - 5z &= 6 \end{aligned}\right\} A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -a & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array} \right) ; \ |A| = (a-2)(a-7)$

4 a) * Si $a = 2 \Rightarrow rg(A) = rg(A|B) = 2 < 3 = n^{\circ}$ incog $\Rightarrow \boxed{SCI}$

* Si $a = 7 \Rightarrow 2 = rg(A) \neq rg(A|B) = 3 \Rightarrow \boxed{SI}$ * Si $a \neq 2, 7 \Rightarrow \boxed{SCD}$

2 b) Si $a = 2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + 3y &= 4 + 2z \\ x + 2y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \boxed{x = -2 - 7t ; \ y = 2 + 3t ; \ z = t \ \forall t \in \mathbb{R}}$

4 $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$, $A = (2, -3, 1)$

2 a) $d(A, \alpha) = \dfrac{|4 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 - 15|}{\sqrt{16+4+16}} = \boxed{\dfrac{3}{2} u}$

4 b) L.G. $P = (x, y, z) / d(P, \alpha) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{|4x + 2y + 4z - 15|}{6} = \dfrac{3}{2}$

$4x + 2y + 4z - 15 = \pm 9 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha_1 \equiv 4x + 2y + 4z - 24 = 0} \\ \boxed{\alpha_2 \equiv 4x + 2y + 4z - 6 = 0} \end{cases}$

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1,3]. **(0,75 puntos)**
b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto (1,3) cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**
c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$. **(1 punto)**

2B. Dadas las funciones $f(x) = 2x\,e^{-x}$ y $g(x) = x^2\,e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos)**

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**
c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. **(0,5 puntos)**

4B. Dados los vectores $\vec{u} = (0,1,1), \vec{v} = (1,1,-1)$ y $\vec{w} = (2,0,3)$:
a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**
b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2,0,2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

5B. a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30 % vota a A, el 50 % a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencia son: el 10 % vota a A, el 60 % a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**
a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**
b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

SOLUCIONES Máxima puntuación = 30 ptos.

1) $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$ es continua en $[1,3]$,

2 a) derivable en $(1,3)$ al ser un polinomio y además $f(1)=f(3)=3+a$, por lo que cumple las hipótesis del teorema de Rolle, por lo tanto $\exists\, c\in(1,3)$ tal

2 b) que $f'(c)=0 \Rightarrow 3x^2-10x+7=0 \Rightarrow \boxed{x=c=\frac{7}{3}\in(1,3)}$

2 c) $m_{RT}=3x^2-10x+7=4 \Rightarrow x=\left\langle\begin{matrix}1/3 \Rightarrow \\ 3 \Rightarrow\end{matrix}\right. \boxed{\begin{matrix}P=(1/3,\ 49/27)\\ Q=(3,\ 3)\end{matrix}}$

2) $f(x)=g(x) \Rightarrow 2xe^{-x}=x^2e^{-x} \Rightarrow 2x=x^2 \Rightarrow x=\left\langle\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$

6 En un punto intermedio $x=1\in(0,2)$ es $f(1)>g(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Area}=\int_0^2[f(x)-g(x)]=\int_0^2(2x-x^2)e^{-x}dx=\ldots=\boxed{0'5413\ u^2}$

3) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A)\neq 0 \Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix}a-1 & 1 & -1\\ 0 & a-2 & 1\\ a & 0 & 2\end{vmatrix}=(3a-4)(a-1)$

2 a) $\boxed{\exists A^{-1} \text{ si } a\neq 4/3,\ a\neq 1}$

2 b) $A^{-1}=\dfrac{[Adj(A)]^t}{|A|}=\ldots=\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}}$

2 c) Si $a=0 \Rightarrow |A|=4$

$|A^{-1}|=1/|A|=\boxed{1/4}$; $|2A|=2^3|A|=8\cdot 4=\boxed{32}$

4) a) $\vec{u}-\lambda\vec{v}\perp\vec{w} \Rightarrow (\vec{u}-\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (-\lambda,1-\lambda,1+\lambda)\cdot(2,0,3)=0$

2 $-2\lambda+3(1+\lambda)=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-3}$

b) Si $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ fueran

2 linealmente dependientes $\Rightarrow |\vec{u},\vec{v},\vec{w}|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=-7\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ son l. i.}}$

2 c) $r\equiv\begin{cases}P=(2,0,2)\\ \vec{d}=\vec{u}\times\vec{v}=\ldots=(-2,1,-1)\end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}x+2y-2=0\\ y+z=2\end{matrix}}$

5)

	A	B	C	Tot
H	10%	60%	30%	40%
M	30%	50%	20%	60%

6

a1) $p(H\cap C)=p(H)\cdot p(C/H)=0'4\cdot 0'3=\boxed{0'12}$

a2) $p(B)p(M/B)=p(M)\cdot p(B/M)$

$p(H/B)=\dfrac{0'3}{0'24+0'3}=\dfrac{0'3}{0'54}=\boxed{0'56}$

b1) X = N (6, 0'5)

$p(X\geq 5)=p(Z\geq 0'38)$

$=1-0'648=0'352$

$\boxed{\text{Opositores}=352}$

b2) $p(X>K)=0'33 \Rightarrow \boxed{K=5'15}$

MATEMÁTICAS II

BC2

EXAMEN FINAL

Examen Matemáticas – 2ª Recuperación final del curso

NOMBRE:

NOTA

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ejercicios propuestos, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos.

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +2y & +az & = & a \\ x & +ay & +2z & = & a \\ -x & +y & +z & = & 1 \end{array} \right. .$$

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

3. a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)} \right)$.

   b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2^{(x-1)} & \text{si} & x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si} & 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right. .$$

   donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

4. a) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

5. a) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-dx}{1 + e^x}$.
   (Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

   b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - 2 & = & 0 \\ y - z - 2 & = & 0 \end{array} \right.$.

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

7. Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$, $s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

   a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

   b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

SOLUCIONES Máxima puntuación = 32 ptos.

1) 3 a) $\exists A^{-1}$ ya que $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{[Ady(A)]^t}{|A|} = \ldots = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

5 b) $AX + I = BC;\ X = A^{-1}(BC - I) = \cdots = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

2) a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a \\ -x + y + z = 1 \end{array}\right\}$ $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$; $|A| = (a-2)(a+4)$

6 • Si $a = 2$: $rg(A) = rg(A|B) = 2 < 3 =$ nº incog $\Rightarrow \boxed{SCI}$

• Si $a = -4$: $2 = rg(A) \neq rg(A|B) = 3 \Rightarrow \boxed{SI}$ • Si $a \neq 2, -4 \Rightarrow \boxed{SCD}$

2 b) Si $a = 2 \Rightarrow$ (SCI) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} z = t \\ x + 2y = 2 - 2t \\ -x + y = 1 - t \end{array}$; $\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{array}}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

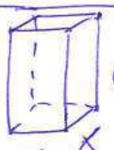
3) 3 a) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 2x - x}{x \operatorname{sen} 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'Hop}{=}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2\cos x - 1}{\operatorname{sen} 2x + 2x \cos 2x} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

5 b) • En $x = 1$: $1 = f(1) \neq \lim_{x \to 1^+} (x - 2) = -1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Salto finito de valor 2}}$

• En $x = 2$: $0 = f(2) = \lim_{x \to 2^-} (x - 2) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Continua en } x = 2}$

4) 

5 a) Restricción: Volumen $= 108\ dm^3 = x^2 y$

Función a optimizar: $S(x, y) = x^2 + 4xy$ mínima

$y = \frac{108}{x^2} \Rightarrow S(x) = x^2 + \frac{432}{x};\ S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x = 6\ dm,\ y = 3\ dm}$; Es mínimo ya que $S''(6) > 0$

3 b) $RT \equiv \begin{cases} P = (1, 1) \\ m = f'(1) = (2x + 1)_{x=1} = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv y - 1 = 3(x - 1)}$

5

4

a) $\int \frac{-dx}{1+e^x} = \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{bmatrix} = \int \frac{-1}{1+t}\,\frac{dt}{t} =$

$= \int \frac{-dt}{t(1+t)} = \int -\left(\frac{1}{t} + \frac{-1}{1+t}\right) dt = -\ln|t| + \ln|1+t| =$

$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A + At + Bt}{t(1+t)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$

$= -\ln|e^x| + \ln|1+e^x| = \boxed{-x + \ln|1+e^x| + K}$

4

b) $\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2+2x+4 \\ g(x) = x+2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right\}$ Area $= \int_{-1}^{2} (f-g)\,dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \boxed{\frac{9}{2}u^2}$

6

$\pi \equiv x+2y-z-4=0$

$r \equiv \begin{cases} x-2y-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$

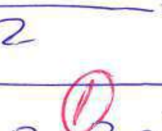
$P = (1,2,-1)$

3

a) $d(P,\pi) = \frac{|1+2\cdot 2-(-1)-4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|1+4+1-4|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}u}$

5

b) $A = r \cap B = \dots = (2,0,-2)$



Area $= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$\vec{AB} = (-1,-1,4)$; $\vec{AC} = (-2,1,3)$; $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-7,-5,-3)$

Area $= \frac{1}{2}|(-7,-5,-3)| = \frac{\sqrt{49+25+9}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{83}}{2}u^2}$

7

4

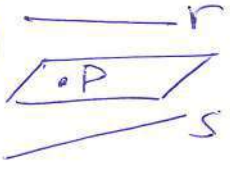
a) $\vec{v}_r = (2,-2,0) \times (0,0,1) = (-2,-2,0)$; $R = (1,-1,0)$

$\vec{v}_s = (3,-2,1)$; $S = (0,-2,1)$; $\vec{RS} = (-1,-1,1)$

• $Rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{RS}) = Rg\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan

4

b)



$\pi = \begin{cases} P = (-1,0,2) \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (-2,-2,0) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (3,-2,1) \end{cases}$ $\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & -2 & 3 \\ y & -2 & -2 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\boxed{\pi \equiv x-y-5z+11=0}$

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo [-1,1]. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real. **(1 punto)**

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^2 - 1)\cos x \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2}\, dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x = t$.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & az & = & 4 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ x & + & 4y & - & 5z & = & 6 \end{array}\right\}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. **(1 punto)**

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$:
a) Calcula la distancia del punto A al plano α. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α. **(1,5 puntos)**

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3 % de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4 % de defectuosos y la C produce 800 con un 2 % de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA (A) 1 = 0'25 ptos.

1A a) $f(x)$ cont. en $[a,b]$ con $f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists\, c\in(a,b) / f(c)=0$

(6) 1'5 Sea $I=[-1,1]$; $f(-1)\cdot f(1) = (-1)\cdot(3) < 0 \Rightarrow \exists\, c\in(-1,1) / f(c)=0$ ya que $f(x)$ es cont.

(4) 1 b) $f'(x) = 15x^{14} + 1 \neq 0 \ \forall x \Rightarrow$ No tiene extremos.

2A a) $\int_0^{\pi}(x^2-1)\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u=x^2-1 & du=2x\,dx \\ dv=\cos x\,dx & v=\operatorname{sen} x\end{bmatrix} = \left[(x^2-1)\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} x\,dx = 0 -$

(5) 1'25 $-2\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\operatorname{sen} x\,dx & v=-\cos x\end{bmatrix} = -2\left[\left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right] = -2\left(\pi + \left[\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi}\right) = \boxed{-2\pi}$

(5) 1'25 b) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx = \begin{bmatrix} e^x = t \\ e^x dx = dt\end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+t-2} = \int\left(\frac{1/3}{t-1} + \frac{-1/3}{t+2}\right)dt = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+2}\right| =$
$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+2}\right| + K$

3A $|A| = a^2-9a+14 = (a-7)(a-2)$

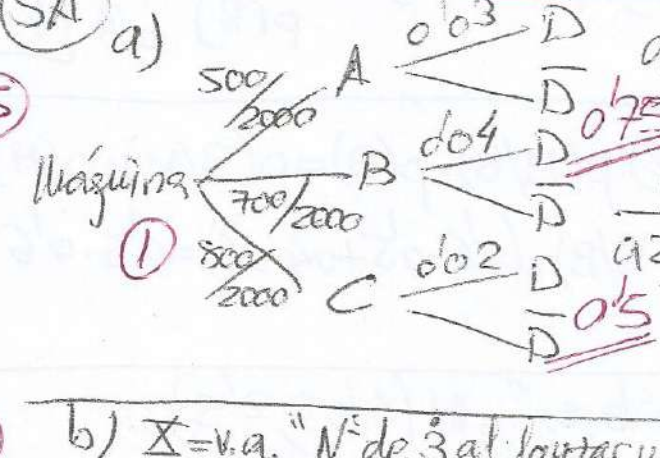
(6) 1'5 a) $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -a & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6\end{array}\right)$
- Si $a=7 \Rightarrow 2=Rg(A) \neq Rg(A|B)=3 \Rightarrow$ SI
- Si $a=2 \Rightarrow Rg(A)=Rg(A|B)=2<3 \Rightarrow$ SCI
- Si $a\neq 7,2 \Rightarrow Rg(A)=Rg(A|B)=3=$ nº inc $\Rightarrow$ SCD

(4) 1 b) $(A|B)(a=2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6\end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} x+3y=4+2z \\ x+2y=2-z\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=-2-7t \\ y=2+3t \\ z=t\end{matrix} \ \forall t\in\mathbb{R}$

4A (4) 1 a) $d(A,\alpha) = \frac{|4\cdot 2+2(-3)+4\cdot 1-15|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}} = \frac{|-9|}{6} = \frac{9}{6} = \boxed{\frac{3}{2}\,u}$

(6) 1'5 b) Sea $P=(x,y,z) \Rightarrow d(P,\alpha)=d(A,\alpha) \Rightarrow \frac{|4x+2y+4z-15|}{6} = \frac{9}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv 4x+2y+4z-24=0}$; $\boxed{\pi_2 \equiv 4x+2y+4z-6=0}$

5A (5) a)



0'75 a1) $p(D) = p(D/A)\,p(A) + p(D/B)\,p(B) + p(D/C)\,p(C)$
$p(D) = \frac{3}{100}\cdot\frac{500}{2000} + \frac{4}{100}\cdot\frac{700}{2000} + \frac{2}{100}\cdot\frac{800}{2000} = \boxed{0'0295}$

0'5 a2) $p(A/D)\cdot p(D) = p(D/A)\cdot p(A)$
$p(A/D) = \frac{3/100 \cdot 500/2000}{0'0295} = \boxed{0'2542}$

(5) b) $X=$ v.a. "Nº de 3 al lanzar un dado 5 veces" $= \{0,1,2,3,4,5\} = B(5, 1/3)$

0'75 b1) $\mu = np = 5\cdot 1/3 = \boxed{5/3 \simeq 1'67}$; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5\cdot 1/3\cdot 2/3} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{3} \simeq 1'05}$

0'5 b2) $p(X\geq 4) = p(X=4)+p(X=5) = 0'0412 + 0'0041 = \boxed{0'0453}$

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1,3]. **(0,75 puntos)**
b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto (1,3) cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**
c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$. **(1 punto)**

2B. Dadas las funciones $f(x) = 2x\,e^{-x}$ y $g(x) = x^2\,e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos)**

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**
c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. **(0,5 puntos)**

4B. Dados los vectores $\vec{u} = (0,1,1), \vec{v} = (1,1,-1)$ y $\vec{w} = (2,0,3)$:
a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**
b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2,0,2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

5B. a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30 % vota a A, el 50 % a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencia son: el 10 % vota a A, el 60 % a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

PROPUESTA (B) $\qquad$ (1) $= 0'25$ ptos

(3) 0'75 a) (1B) $f(x)$ es cont. en $[1,3]$ y derivable en $(1,3)$ con $f(1) = f(3) = 3+a \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, c \in (1,3) \,/\, f'(c) = 0 \;\; \forall a \in \mathbb{R}$

(3) 0'75 b) $f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 10c + 7 = 0 \Rightarrow c = \begin{cases} 1 \notin (1,3) \\ 7/3 \end{cases}$

(4) 1 c) $f'(x) = 4$

$3x^2 - 10x + 7 = 4 \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \Rightarrow \boxed{P_1 = (3,3)} \\ 1/3 \Rightarrow \boxed{P_2 = (1/3, 49/27)} \end{cases}$

(10) 2'5 (2B) $f(x) = g(x) \Rightarrow x = 0, 2 \Rightarrow \text{Área} = \int_0^2 (f-g)\,dx =$
$= \int_0^2 (2xe^{-x} - x^2e^{-x})\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)e^{-x}\,dx = \boxed{4/e^2} \simeq \boxed{0'5413\ u^2}$

(4) 1 (3B) a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow |A| = 3a^2 - 7a + 4 \neq 0 \;\; \boxed{\forall a \neq 4/3, 1}$

(4) 1 b) $A(a=2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

(2) 0'5 c) $A(a=0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1} = 1/4 \;;\; |2A| = 2^3 \cdot |A| = 32$

(4) 1 (4B) a) $(\vec{u} - \lambda\vec{v}) \perp \vec{w} \Rightarrow (\vec{u} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (-\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)(2,0,3) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3}$

(2) 0'5 b) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son l.d. $\Leftrightarrow |\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow$ Son l.i.

(4) 1 c) $r \equiv \begin{cases} P = (2,0,2) \\ \vec{v}_r = \vec{u} \times \vec{v} = (-2,1,-1) \end{cases} \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}}$

(5B) a)

(5) (1)

Censo
- 0'6 M
  - 0'3 A
  - 0'5 B
  - 0'2 C
- 0'4 H
  - 0'1 A
  - 0'6 B
  - 0'3 C

	A	B	C	
M	18	30	12	60
H	4	24	12	40
	22	54	24	100

0'75 a1) $p(H \cap C) = \frac{12}{100} = \boxed{0'12}$

0'5 a2) $p(M/B) \cdot p(B) = p(B/M) \cdot p(M)$
$P(M/B) \cdot (0'6 \cdot 0'5 + 0'4 \cdot 0'6) = 0'5 \cdot 0'6$
$P(M/B) = \boxed{5/9 \simeq 0'56}$

b) X = v.a. "Notas de 1.000 opositores" $= N(4'05, 2'5)$ $\qquad$ 352 opositores

(5) 0'75 b1) $p(X \geq 5) = p\left(Z \geq \frac{5 - 4'05}{2'5}\right) = p(Z \geq 0'38) = 1 - p(Z \leq 0'38) = 1 - 0'648 = \boxed{0'352}$

0'5 b2) $0'33 = p(X \geq K) = p\left(Z \geq \frac{K - 4'05}{2'5}\right) = 1 - p\left(Z \leq \frac{K - 4'05}{2'5}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{K - 4'05}{2'5} = 0'44 \Rightarrow \boxed{K = 5'15}$

MATEMATICAS. BC2 3ª Evaluación. R3

1B. Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x-2}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}$$ **(1,25 puntos por cada función)**

2B. Dada la función $f(x) = (x+1)e^{2x}$, se pide:
a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra una primitiva de la función $f(x)$ que pase por el origen de coordenadas. **(1,25 puntos)**

3B. He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.
a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que el número cuya cifra de las centenas es x, la de las decenas y, y la de las unidades z, puede expresarse como $100x + 10y + z$. **(1,5 puntos)**
b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado. **(1 punto)**

4B. Dados los puntos $A(1, \lambda+1, -1)$, $B(2, \lambda, 0)$ y $C(\lambda+2, 0, 1)$, se pide:
a) Estudia si existe algún valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que A, B y C estén alineados. **(1,25 puntos)**
b) Para $\lambda = -1$, da la ecuación implícita del plano π que contiene a los puntos A, B y C. **(1,25 puntos)**

SOLUCIONES — Máxima puntuación = 40 ptos.

1) a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$; $\boxed{Dom(f)=[0,\infty)-\{2\}}$

AH: $y=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x}=-1 \Rightarrow \boxed{y=-1 \text{ es A.H.}}$

A.V.: $\lim\limits_{x\to 2^\pm} f(x)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2^\pm}\frac{(\sqrt{2x}-x)(\sqrt{2x}+x)}{(x-2)(\sqrt{2x}+x)}=\frac{-1}{2}$; $\boxed{\text{No hay AV}}$

A.O.: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2}=0 \Rightarrow \boxed{\text{No hay A.O.}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4x+4}$; $\boxed{Dom(f)=\mathbb{R}-\{2\}}$ **AH:** $y=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\boxed{\text{No hay A.H.}}$

AV: $\lim\limits_{x\to 2^\pm} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^\pm}\frac{x^3}{(x-2)^2}=\frac{8}{0^+}=+\infty \Rightarrow \boxed{x=2 \text{ es A.V.}}$

AO: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=4 \Rightarrow \boxed{y=x+4 \text{ es A.O.}}$

2) $y=(x+1)e^{2x}$; $y'=(2x+3)e^{2x}$; $y''=(4x+8)e^{2x}$

a) $y''=0 \Rightarrow x=-2$: Si $x=-3 \Rightarrow y''(-3)<0$; Si $x=0 \Rightarrow y''(0)>0$ $\quad \boxed{\cup: x\in(-2,\infty)}$ $\boxed{\cap: x\in(-\infty,-2)}$

En $\boxed{x=-2}$ hay un punto de inflexión ya que $y'''(-2)\neq 0$

b) $F(x)=\int (x+1)e^{2x}dx=\left[\begin{matrix} u=x+1 & du=dx \\ dv=e^{2x}dx & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right]=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=$

$=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+K=\frac{1}{4}e^{2x}(2x+1)+K$; Si $F(0)=0 \Rightarrow K=\frac{-1}{4} \Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{e^{2x}}{4}(2x+1)-\frac{1}{4}}$

3) "xyz" $\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{x+z}{2} \\ \text{"xyz"}-\text{"zyx"}=198 \\ x+y+z=12 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-2y+z=0 \\ x-z=2 \\ x+y+z=12 \end{matrix}\right\} A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $|A|\neq 0$, el sistema tiene solución y el número es $\boxed{543}$

4) $\left.\begin{matrix} A=(1,\lambda+1,-1) \\ B=(2,\lambda,0) \\ C=(\lambda+2,0,1) \end{matrix}\right\}$ a) Para que A, B, C estén alineados $\vec{AB} \sim \vec{AC}$

$\vec{AB}=(1,-1,1)$; $\vec{AC}=(\lambda+1,-\lambda-1,2) \Rightarrow \frac{\lambda+1}{1}=\frac{-\lambda-1}{-1}=\frac{2}{1}$

Las igualdades se cumplen para $\boxed{\lambda=1}$

b) $\left.\begin{matrix} A=(1,0,-1) \\ B=(2,-1,0) \\ C=(1,0,1) \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} \vec{u}=\vec{AB}=(1,-1,1) \\ \vec{v}=\vec{AC}=(0,0,2) \\ C=(1,0,1) \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & -1 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+y-1=0}$

Universidad de Castilla-La Mancha
Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios Bachillerato (LOGSE)
Materia: **MATEMÁTICAS II**

La prueba consta de cuatro bloques de dos preguntas cada uno. Debes contestar una pregunta de cada bloque. Cada pregunta puntúa de cero a 2'5 puntos. Puedes usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

A. 1.- Determina un polinomio $p(x)$ sabiendo que:
$p'''(x) = 24x;\ p''(0) = 2,\ p'(0) = 1$ y $p(0) = 0$.
2.- Esboza la representación gráfica de la función $f(x) = p(x) - x$

B. 1.- Estudia el crecimiento y la concavidad de la función $f:(0,+\infty) \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$. (L = logaritmo neperiano)
2.- Esboza su representación gráfica.

SEGUNDO BLOQUE: Ejercicio obligatorio

A. 1.- Enuncia la regla de l'Hôpital.
2.- Resuelve el límite siguiente: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{\text{tg } x - \text{sen } x}$

TERCER BLOQUE

A. Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a: $\begin{array}{l} x + 2y + z = a \\ x + 2y + az = a \end{array}$,
1.- Discusión del mismo en función del valor del parámetro a.
2.- Resolución en el caso de que $a = 2$ aplicando la regla de Cramer.

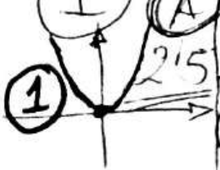
B. Discute, en función de los valores de *m*, el siguiente sistema: $\begin{array}{l} 2x - 3y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + mz = m \end{array}$

CUARTO BLOQUE: Ejercicio obligatorio

B. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde *m* es real.
1.- Encuentra los valores de *m* para los que A·B tiene inversa.
2.- Calcula dicha inversa.

soluciones

I **A** 2'5 (1)



1.- $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \Rightarrow \boxed{p(x)=x^4+x^2+x}$ 0'5 0'5

2.- $f(x)=p(x)-x=x^4+x^2$ 0'5

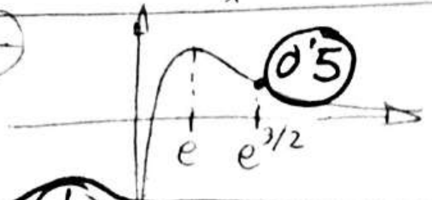
B 2'5

1.- $y=\frac{Lx}{x};\ y'=\frac{1-Lx}{x^2};\ y''=\frac{-3x+2xLx}{x^4}=\frac{-3+2Lx}{x^3}$

$y'=0 \Rightarrow x=e \Rightarrow$ $\boxed{\text{Crece en } (0,e)}$ (1)

$y''=0 \Rightarrow x=e^{3/2} \Rightarrow$ $\boxed{\text{Cóncava en } (e^{3/2},\infty)}$ (1)

2.-



0'5

II 2'5

1.- $f(x), g(x)$ derivable en $x=a$, con $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 0'5 0'5

2.- $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{tg\,x-\operatorname{sen}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+tg^2x-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\operatorname{sen}}x}{2\frac{\cancel{\operatorname{sen}x}}{\cos x}(1+tg^2x)+\cancel{\operatorname{sen}x}}=\frac{1}{3}$ 0'5 (1)

III **A** 2'5

$\left.\begin{array}{l}x+2y+z=a\\x+2y+az=a\end{array}\right\}\ A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\1&2&a&a\end{array}\right)$ $rg(A)=2$ si $a\neq 1$; $rg(A)=1$ si $a=1$.

1.- $A|B$ no amplía rango en ningún caso, es decir: $a=1$: $rg(A)=rg(A|B)=1$; $a\neq 1$: $rg(A)=rg(A|B)=2$, por tanto el sistema es $\boxed{\text{SCI siempre}}$ 0'5 (1)

2.- $a=2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x+2y+z=2\\x+2y+2z=2\end{array}\right. \Rightarrow$ si $x=t \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2y+z=2-t\\2y+2z=2-t\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}x=t\\y=\frac{2-t}{2}\\z=0\end{array}\ \forall t$ (1)

B 2'5

$\left.\begin{array}{l}2x-3y=0\\x-y+z=0\\x+2y+mz=m\end{array}\right\}\ A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&0&0\\1&-1&1&0\\1&2&m&m\end{array}\right)$ $|A|=-7+m$ 0'5 (1)

$m=7 \Rightarrow rg(A)=2\neq rg(A|B)=3$ (SI)

$m\neq 7 \Rightarrow rg(A)=rg(A|B)=3$ (SCD)

IV 2'5

1.- $A\cdot B=\begin{pmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{pmatrix}$ 0'5

$\exists (AB)^{-1} \Leftrightarrow |AB|\neq 0 \Rightarrow -(1-m)(2+2m)\neq 0$ 0'5 $\boxed{m=1,\ m=-1}$

2.- $(AB)^{-1}=\frac{[Adj(AB)]^t}{|AB|}=\frac{1}{-(1-m)(2+2m)}\begin{pmatrix}0&-(1-m)\\-(2+2m)&1+2m\end{pmatrix}^t=\frac{-1}{(1-m)(2+2m)}\begin{pmatrix}0&\ldots\\ \ldots&\ldots\end{pmatrix}$ 0'5

$(AB)^{-1}=\frac{-1}{(1-m)(2+2m)}\begin{pmatrix}0&-(2+2m)\\-(1-m)&1+2m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{1-m}\\ \frac{1}{2+2m}&\frac{-(1+2m)}{(1-m)(2+2m)}\end{pmatrix}$ 0'5

UNIVERSIDAD DE CASTILLA – LA MANCHA
Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios (Bachillerato L.O.G.S.E.)
Materia: **MATEMÁTICAS II** Esta prueba consta de cuatro bloques de dos preguntas cada uno. El alumno debe contestar una pregunta de cada bloque. Todas las preguntas puntúan de cero a 2,5 puntos. Se puede usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

A. a)Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} 5x+b & si \quad x<1 \\ ax^2+3x+5 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

b)Determina los valores de a y b para que sea continua y derivable en todo número real.

B. Considera las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 8$; $g(x) = -x^2 + 8x$.

a) Dibuja sus gráficas utilizando los mismos ejes.
b) Halla el área de la región encerrada por ellas.

SEGUNDO BLOQUE

A. En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que, doblándolo convenientemente, haga con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido.
Calcula la cuantía del máximo premio que se puede obtener en ese concurso.

B. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \leq 2 \\ -x^2+6x & si \quad x>2 \end{cases}$

a) ¿Cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]?
b) ¿Hay algún punto de la gráfica en el que la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos (0, f(0)), (3, f(3))?

TERCER BLOQUE

A. a)Estudia, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-2y-z &= -1 \\ ax-y+2z &= 2 \\ x+2y+az &= 3 \end{cases}$$

b)Resuelve el sistema para $a = 3$.

B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, una matriz X de números enteros tal que XA = (10, 6, 2).

CUARTO BLOQUE

A. Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x-ay &= 1 \\ y-z &= 1 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x-2y-z &= 0 \\ x+y+z &= 8 \end{cases}$

Prueba que, para ningún valor de a, r y s, pueden ser paralelas, y averigua el único valor de a para el que se cortan.

B. Halla la ecuación de la recta que pasa por A(2,-1,3) y es perpendicular al plano que pasa por los puntos B(1,1,0), C(0,-1,2) y D(-2,2,1). Calcula también el volumen del tetraedro ABCD.

SOLUCIONES

BLOQUE I

(A) a) * Posibles Problemas de Continuidad $= \{1\}$ $\boxed{\text{Cont en } \mathbb{R} \text{ si } b=a+3}$ 0'5

2'5

$\bullet \exists f(1) = a+3+5 = a+8$

$\bullet 5+b = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = a+8$

$\bullet a+8 = 5+b$

$b = a+3$ 0'5

b) * Posibles problemas de Derivabilidad $= \{1\}$. $\boxed{b=4}$ 0'5

$f'_-(1) = 5$, $f'_+(1) = 2a+3 \Rightarrow 2a+3 = 5 \Rightarrow \boxed{a=1}$ 0'5

(B) 2'5

x	$y=x^2-2x+8$
1	7 (V)
0	8
4	16

$x_V = \frac{2}{2} = 1$

x	$y=-x^2+8x$
4 (V)	16
0	0
1	7

$x_V = \frac{-8}{-2} = 4$

$x^2-2x+8 = -x^2+8x$

$2x^2-10x+8=0$

$x = 1, 4$

b) $\text{Área} = \int_1^4 [(-x^2+8x)-(x^2-2x+8)]\,dx = \int_1^4 (-2x^2+10x-8)\,dx = \left.\frac{-2x^3}{3}+\frac{10x^2}{2}-8x\right]_1^4 = 9$ 1 0'5

BLOQUE II

(A) 2'5

0'5 Maximizar $A(x,y) = xy$

0'5 Restricción $2x+2y = 20\,dm$

$A(x) = x(10-x)$

$A'(x) = 10-2x$

$A''(x) = -2$

$A'(x)=0 \Rightarrow x=5$. $A''(5)<0 \Rightarrow$ $x=5$ es Máximo 0'5

Máximo área $= 5 \cdot 5 = 25\,dm^2 \Rightarrow \boxed{\text{Máximo premio} = 25\,€}$ 1

2'5 (B) Hipótesis del Teorema del valor medio: 0'5 $f(x)$ continua en $[0,3]$; $f(x)$ derivable en $(0,3)$ $\Rightarrow \exists c \in (0,3) / f'(c) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0}$

$\bullet$ Continuidad: En $x=2$: $\exists f(2)=8$, $\lim_{x \to 2^\pm} f(x) = 8 \Rightarrow$ Continua 0'5

$\bullet$ Derivabilidad: En $x=2$: $f'_-(2) = 12 \neq f'_+(2) = 2 \Rightarrow$ No Derivable 0'5

$\boxed{\text{No las cumple}}$ 0'5

b) El teorema del valor medio no asegura que exista, pero puede existir, veamos a ver si existe: $f'(c) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{9}{3} = 3 = \begin{cases} =3x^2 \text{ si } x \leq 2 \Rightarrow x = \pm 1 \\ =-2x+6 \text{ si } x>2 \Rightarrow x = 3/2 \end{cases}$

$\boxed{\text{Se cumple en } x=1}$ 0'5

BLOQUE III

(A) a) $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{array}\right)$; $|A| = 2a^2-3a-9=0 \begin{cases} a=3 \\ a=-3/2 \end{cases}$ 0'5

2'5

Si $a=3 \Rightarrow A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow rg(A) = rg(A|B) = 2 \Rightarrow$ SCI 0'5

Si $a = \frac{-3}{2} \Rightarrow A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -3/2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3/2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow 2 = rg(A) \neq rg(A|B) = 3 \Rightarrow$ SI 0'5

Si $a \neq 3, -3/2 \Rightarrow rg(A) = rg(A|B) = 3 \Rightarrow$ SCD 0'5

b) $a=3 \Rightarrow A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2y = -1+z \\ 3x-y = 2-2z \end{array}\right\}$ $\begin{cases} x = 1- \\ y = 1-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ 0'5

0'5 1'5

2'5 (B) $X \cdot A = (10,6,2) \Rightarrow X = (10,6,2) \cdot A^{-1}$. $\exists A^{-1}$ ya que $|A|$ 0'5

BLOQUE IV

(A) Posición relativa de r y s $\Rightarrow$ $\begin{cases} \vec{v}_r = (1,-a,0) \times (0,1,-1) = (a,1, \\ \vec{v}_s = (1,-2,-1) \times (1,1,1) = (-1,-2,3) \\ \vec{P_rP_s} = (3,0,5) \end{cases}$

2'5 $P_r = (1,0,-1)$ $P_s = (4,0,4)$

$R = rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{P_rP_s}) = ?$ $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10a+20 = 0 \Rightarrow a=2$ 0'5

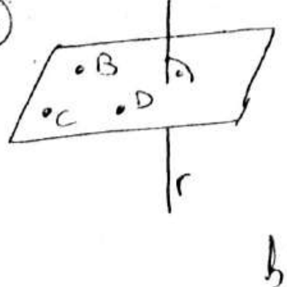
$S = rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = rg\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

0'5 Si $a=2 \Rightarrow rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{P_rP_s}) = rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2 \Rightarrow$ las rectas se cortan

0'5 Si $a \neq 2 \Rightarrow 3 = rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{P_rP_s}) \neq rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2 \Rightarrow$ las rectas se cruzan

1 Sol: Las rectas se cruzan siempre salvo para $a=2$ que se cortan

2'5 (B)



a) $r \equiv \begin{cases} A = (2,-1,3) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{w}_\pi \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2+4\lambda \\ y = -1+5\lambda \\ z = 3+7\lambda \end{cases}$ 1

$\pi \equiv \begin{cases} B = (1,1,0) \in \pi \\ C = (0,-1,2) \in \pi \\ D = (-2,2,1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \vec{w}_\pi = \vec{CB} \times \vec{CD} = (4,5,7)$ 0'5

b) $V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{CA}] \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{15}{6} u^3$ 0'5 0'5

Mn

UNIVERSIDAD DE CASTILLA – LA MANCHA
Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios (Bachillerato L.O.G.S.E.)
Materia: **MATEMÁTICAS II** Esta prueba consta de cuatro bloques de dos preguntas cada uno. El alumno debe contestar una pregunta de cada bloque. Todas las preguntas puntúan de cero a 2,5 puntos. Se puede usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

A. a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$.

B. Calcula las dimensiones de 3 campos cuadrados de modo que: el perímetro del mayor sea el doble del perímetro del menor, se necesiten exactamente 1120 metros de valla para vallar los tres campos y las sumas de sus áreas sea la mínima posible. Cada campo tiene su propia valla.

SEGUNDO BLOQUE

A. Halla la siguiente integral

$$\int \frac{3x^3-3x^2-2x}{x-1}\,dx$$

B. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, estudia:

a) Asíntotas.
b) Máximos y mínimos.
c) Intervalos de concavidad y convexidad.
d) Haz un dibujo aproximado de la gráfica aprovechando los apartados anteriores.

TERCER BLOQUE

A. Resuelve la ecuación matricial AX – B + C = 0,

donde $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

B. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de c tales que la matriz A+cB no tenga rango 2.
b) Calcula, para los valores hallados de c, la matriz A(A+cB) y su rango.

CUARTO BLOQUE

A. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 3x-y+z = 0 \\ x-y = 1 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta s que pasa por el punto P(2,-1,0) y corta perpendicularmente a r.
b) Calcula el punto Q intersección de r y s.
c) Calcula el simétrico de P respecto a r.

B. Considera los cuatro puntos A(1,0,1), B(1,1,0), C(0,1,1) y D(1, k, k-1).

a) Halla k para que los cuatro puntos sean coplanarios (estén en el mismo plano).
b) ¿Qué valores de k hacen que el volumen del tetraedro determinado por los cuatro puntos sea 30 unidades de volumen?

SOLUCIONES

BLOQUE I | A | 1 a) $f(x), g(x)$ derivable en $x = x_0$ con (0'5)

$f(x_0) = g(x_0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (0'5) $= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

1'5 b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} \cdot 2x}{-\operatorname{sen} x}$ (0'5) $= \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$= -2 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{\cos x}$ (0'5) $= \dfrac{-2 \cdot 1}{1} = \boxed{-2}$ (0'5)

2'5 B Campo 1 > Campo 2 > Campo 3 $4x = 2(4z)$

x | y | z $4x + 4y + 4z = 1120$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ mínimo

Se trata de optimizar $f(x,y,z)$ (0'5) $= x^2 + y^2 + z^2$ haciéndola mínima sujeta a las restricciones (0'5) $4x = 2(4z)$ y $4x + 4y + 4z = 1120$.

Minim. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $f(z) = 4z^2 + (280 - 3z)^2 + z^2$

Restricc: $x = 2z \cdot x + y + z = 280$ $f'(z) = 28z - 1680$

$f'(z) = 0 \Rightarrow$ (0'5) $z = 60 \Rightarrow f''(60) = 28 > 0 \Rightarrow$ (0'5) $z = 60$ es mínimo.

Sol (0'5) $x = 2 \cdot 60 = \underline{120\text{ m}}$; $y = 280 - 3 \cdot 60 = \underline{100\text{ m}}$; $z = \underline{60\text{ m}}$

BLOQUE II | A 2'5 $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x}{x - 1}\,dx = \left[\begin{array}{l} D = d \cdot c + r \\ D/d = c + r/d \end{array}\right]$ (0'5) $= \displaystyle\int \left(3x^2 - 2 + \frac{-2}{x-1}\right) dx$ (0'5) $=$

(0'5) $= \boxed{3x^3/3 - 2x - 2L|x - 1| + C}$ (0'5) (0'5)

2'5 B $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ $y'' = \dfrac{2}{x^3}$

a) A.H: $y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x} = \infty \Rightarrow$ No tiene AH

A.V: $\lim\limits_{x \to 0^\pm} \dfrac{x^2 + 1}{x} = \dfrac{1}{0^\pm} = \pm\infty \Rightarrow x = 0$ es AV (0'5)

A.O. $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2} = 1$; $n = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{x} - x\right) = 0 \Rightarrow y = x$ es A.O (0'5)

$y'' \gtrless 0$ ∩ 0 ∪ $y'' < 0$ $x < 0$, $y'' > 0$ $x > 0$

∩ en $(-\infty, 0)$
∪ en $(0, \infty)$ (0'5)

b) $y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (0'5); $y''(1) = 2 > 0 \Rightarrow x = 1$ es mín; $y''(-1) = -2 < 0$ | $x = -1$ es MAX

BLOQUE III

(A) 2'5

$AX - B + C = 0$; $A^{-1} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ 0'5

$X = A^{-1}(B - C)$ 0'5 (1)

$$X = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ -3 & -1 & 4 & 0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}3 & 1 & -4 & 0\\ -11 & -1 & 14 & -2\end{pmatrix}}$$ 0'5

(B) 1 a)

$A + cB = \begin{pmatrix}1+c & -1\\ 4+4c & 2-c\end{pmatrix}$; $rg(A+cB) < 2 \Leftrightarrow |A+cB| = 0$ 0'5

$$|A+cB| = \begin{vmatrix}1+c & -1\\ 4+4c & 2-c\end{vmatrix} = (1+c)(2-c) + (4+4c) = 0 \Rightarrow -c^2 + 5c + 6 = 0 \quad \boxed{c = -1, 6}$$ 0'5

1'5 b) $c = -1$: $A(A+cB) = \begin{pmatrix}0 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow rg[A(A+cB)] = 1$ 0'5

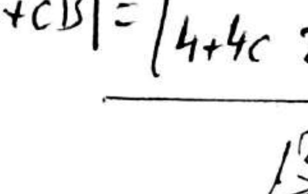
$c = 6$: $A(A+cB) = \begin{pmatrix}-21 & 3\\ -28 & -12\end{pmatrix} \Rightarrow rg[A(A+cB)] = 2$ (1)

BLOQUE IV

(A) 1'5 a)

$s \equiv \begin{cases} P = (2,-1,0) \in s \\ r \perp s \end{cases}$ $\quad r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1,1,-2)$ 0'5

Sea $Q_r = (1,0,-3) \in r \Rightarrow P_r = (1+t, t, -3-2t)$ un punto genérico de r



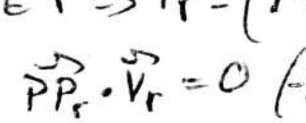
$\vec{PP_r}\cdot\vec{v}_r = 0$ $(-1+t, t+1, -3-2t)(1,1,-2) = 0 \Rightarrow t = -1$

$Q = P_r|_{t=-1}$; $s \equiv \begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$

$Q = (0,-1,-1) \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{PQ}$ (1)

0'5 b) $Q = r \cap s = (0,-1,-1)$ 0'5

0'5 c)



$\vec{PP'} = 2\vec{PQ}$ $\quad P = (2,-1,0)$; $Q = (0,-1,-1)$

$(x-2, y+1, z) = 2(-2, 0, -1)$; $x = -2$, $y = -1$, $z = -2$; $P' = (-2,-1,-2)$ 0'5

(B) 1'5 a) $A, B, C, D \in \pi \Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ son l.d. $\Rightarrow$ Rango = 2 0'5

$\vec{AB} = (0,1,-1)$; $\vec{AC} = (-1,1,0)$; $\vec{AD} = (0,K,K-2) \Rightarrow \begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & K & K-2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{K = 1}$ 0'5 0'5

1 b) $V = \frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & K & K-2\end{vmatrix} = \frac{K-2+K}{6} = 30$ 0'5 $\boxed{K = 91}$ 0'5