4 Ecuaciones e inecuaciones

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+2}{5} - x = 3x - \frac{4-x}{3}$ b) $\frac{x-5}{6} - \frac{x}{12} = \frac{x}{3} + \frac{x+2}{4}$ c) $\frac{\frac{x}{2} - \frac{x}{3}}{3} + x = \frac{\frac{2x-1}{3}}{6}$

2. Un compuesto farmacéutico tiene una quinta parte de cloruro sódico, una cuarta parte de tricetol, la mitad de bencidamina y 25 mg de excipiente. Calcula el peso del compuesto.

3. Dadas las siguientes ecuaciones:

a) $12x^2 + 15x - 18 = 0$ c) $x^2 + 4x + 4 = 0$

b) $2x^2 - 6 = 0$ d) $x^2 + x + 1 = 0$

Determina el número de soluciones antes de resolverlas y resuélvelas cuando sea posible.

4. a) La suma de dos números es 22 y la suma de sus cuadrados es 274. Halla ambos números.

b) El producto de dos números excede en una unidad al triple de su suma, y su diferencia es igual a 9. Halla ambos números.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ c) $\sqrt[3]{2x-1} = 5$

b) $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0$ d) $\sqrt{2x-5} - \sqrt{x-3} = 1$

6. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2 + x \geqslant 5(x+1)$ c) $x^2 + 2x - 15 \leqslant 0$

b) $x + \frac{x-1}{5} < 2x - \frac{3-x}{2}$ d) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

7. Un pintor tarda 12 horas en pintar un piso; otro pintor lo hace en 18 horas. ¿Cuántas horas tardarán en pintarlo entre los dos?

SOLUCIONES

1. a) $\dfrac{-4x+2}{5} = \dfrac{10x-4}{3} \Leftrightarrow -62x = -26 \Leftrightarrow x = \dfrac{13}{31}$

b) $\dfrac{2x - 10 - x}{12} = \dfrac{4x + 3x + 6}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x = 16 \Leftrightarrow x = \dfrac{-8}{3}$

c) $\dfrac{\dfrac{3x - 2x}{6}}{3} + x = \dfrac{2x - 1}{18} \Leftrightarrow \dfrac{x + 18x}{18} =$

$= \dfrac{2x - 1}{18} \Leftrightarrow 17x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{17}$

2. Sea c el peso en gramos del compuesto.

$\dfrac{c}{5} + \dfrac{c}{4} + \dfrac{c}{2} + 25 = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4c + 5c + 10c + 500 = 20c \Leftrightarrow c = 500$

El compuesto tiene una masa de 500 mg.

3. a) $12x^2 + 15x - 18 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 5x - 6 = 0$

$b^2 - 4ac = 121 > 0$; dos soluciones.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8} \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ x = -2 \end{cases}$$

b) $2x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0$

$b^2 - 4ac = 12 > 0$; dos soluciones, $x = \pm\sqrt{3}$

c) $b^2 - 4ac = 0$, solución doble.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = -2$$

d) $b^2 - 4ac = -3 < 0$; la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

4. a) Por sumar 22, si uno de los números es x, el otro será $22 - x$.

$x^2 + (22 - x)^2 = 274 \Leftrightarrow x^2 - 22x + 105 = 0$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 420}}{2} = \frac{22 \pm 8}{2} \begin{cases} x = 7 \\ x = 15 \end{cases}$$

Hay dos posibilidades (que van a dar la misma solución):

— Si uno de los números es 7, el otro es 15.

— Si uno de los números es 15, el otro es 7.

Solución: Los números pedidos son 7 y 15.

b) Puesto que la diferencia es 9, si un número es x, el otro es $x + 9$.

$x(x + 9) - 1 = 3[x + (x+9)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = -7$

Se obtienen dos soluciones:

— Si uno de los números es 4, el otro es 13.

— Si uno de los números es -7, el otro es 2.

5. a) Posibles raíces enteras: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

Para $x = 1$: $1 - 9 + 23 - 15 = 0$

Haciendo la división: $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 8x + 15) = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3,\ x = 5$

Solución: $x = 1,\ x = 3,\ x = 5$.

b) Posibles raíces enteras: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Ni $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ cumplen la igualdad.

Para $x = -2$: $-16 + 36 - 14 - 6 = 0$

Haciendo la división: $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + 2)(2x^2 + 5x - 3) = 0$

$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3;\ x = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = -2,\ x = -3,\ x = \dfrac{1}{2}$.

c) $\sqrt[3]{2x - 1} = 5 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x - 1})^3 = 5^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 125 \Leftrightarrow x = \dfrac{126}{2} = 63$

Comprobación: $\sqrt[3]{126 - 1} = 5$; solución: $x = 63$.

d) $(\sqrt{2x - 5})^2 = (1 + \sqrt{x - 3})^2 \Leftrightarrow 2x - 5 = 1 + x - 3 + 2\sqrt{x - 3} \Leftrightarrow x - 3 = 2\sqrt{x - 3} \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Leftrightarrow x = 7;\ x = 3$

Comprobación:

— Si $x = 7$: $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$

— Si $x = 3$: $\sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$

Solución: $x = 7,\ x = 3$.

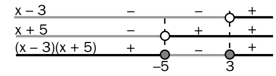
6. a) $2 + x \geqslant 5(x + 1) \Leftrightarrow -3 \geqslant 4x \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{10x + 2x - 2}{10} < \dfrac{20x - 15 + 5x}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -13x < -13 \Leftrightarrow x > 1$

c) $x^2 + 2x - 15 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 5) \leqslant 0$

Solución: $[-5, 3]$



d) $4x^2 - 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 < 0$, lo que es imposible. La ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$.

7. Si entre los dos tardan x horas, en una hora pintarán $\dfrac{1}{x}$ partes del piso.

$\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{5}{36} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{36}{5} = 7{,}2$ horas

Entre los dos pintores tardarán 7 horas y 12 minutos.

4 Ecuaciones e inecuaciones

1. Resuelve:

a) $\dfrac{2x}{2x+1} + \dfrac{3x-1}{3x-3} = 2$

b) $2ax - a^2 = a(x+1),\ a \neq 0$

c) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 2x = 0$

e) $\sqrt{x+5} + \sqrt{4-3} = 3$

f) $2\sqrt{2-x} - \sqrt{6+x} = 2$

g) $\dfrac{x(1-x)}{x+2} > 0$

h) $\dfrac{2x^2}{3} \geqslant \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{4x}{3}$

2. Demuestra que si r_1 y r_2 son soluciones reales de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$, entonces $r_1 + r_2 = -b$ y $r_1 r_2 = c$.

3. Determina todos los valores posibles de r para que $3rx^2 - 4rx + r + 1 = 0$ tenga una única solución.

4. Si un número se disminuye 7 veces en cinco unidades, el resultado es menor que 47. ¿Qué puedes decir sobre este número?

5. Calcula tres números enteros consecutivos e impares sabiendo que el cuádruplo de la suma de los dos primeros es igual al doble de la suma de los dos últimos.

6. Un vendedor hace una mezcla con dos tipos de café: Arábica, de 5,70 euros el kilo, y Jamaica, de 6,60 euros el kilo. ¿Qué cantidad de cada tipo debe mezclar para obtener 30 kilos que se vendan a un precio de 6 euros el kilo?

7. En el mismo instante, dos trenes parten de la misma estación en sentidos contrarios. Calcula la velocidad de cada uno sabiendo que al cabo de 4 horas los separan 1 188 kilómetros y que la velocidad de uno de ellos es 3 km/h inferior al doble de la del otro. Se supone que las velocidades de los trenes son constantes.

8. Álvaro tiene una cierta cantidad de puntos en fichas de veinticinco y de cinco puntos. El número de fichas de 25 puntos es 3 veces el de fichas de 5 puntos, y su valor excede en 560 puntos al valor de las fichas de 5 puntos. ¿Cuántas tiene de cada tipo?

9. Un fabricante puede producir un determinado artículo de lujo a un coste de 200 euros la unidad. Cada artículo se vende a 500 euros y a este precio los consumidores han estado comprando 4 000 unidades mensuales. Estudios de mercado indican que por cada 100 euros de aumento en el precio de venta se venderán cada mes 400 unidades menos.

a) Encuentra una expresión del beneficio mensual en función del precio de venta.

b) Indica los posibles precios de venta para los que el fabricante obtendría un beneficio positivo.

SOLUCIONES

1. a) $\dfrac{2x(3x-3)+(3x-1)(2x+1)}{(2x+1)(3x-3)} = 2 \Leftrightarrow$

$12x^2 - 5x - 1 = 12x^2 - 6x - 6 \Leftrightarrow x = -5$

b) $2ax - a^2 = a(x+1) \Leftrightarrow 2ax - a^2 = ax + a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax = a(a+1) \Leftrightarrow x = a + 1$

c) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3,\ x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}$

d) $x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = 2$

e) $(\sqrt{x+5})^2 = (3 - \sqrt{4-x})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 5 = 9 + 4 - x - 6\sqrt{4-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-8)^2 = (-6\sqrt{4-x})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 80 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0;$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{-1 \pm 9}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = -5 \end{cases}$

Se comprueba que tanto $x = 4$ como $x = -5$ verifican la ecuación; por tanto, son soluciones válidas.

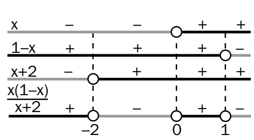
f) $(2\sqrt{2-x})^2 = (2 - \sqrt{6+x})^2 \Leftrightarrow$

$4(2-x) = 4 + 6 + x - \sqrt{6+x} \Leftrightarrow$

$(5x+2)^2 = (4\sqrt{6+x})^2 \Leftrightarrow$

$25x^2 + 4x - 92 = 0;\ x = \dfrac{-4 \pm 96}{50} \begin{cases} x = \dfrac{46}{25} \\ x = -2 \end{cases}$

g) $\dfrac{x(1-x)}{x+2} > 0$

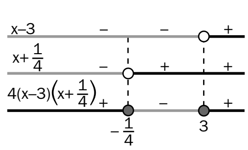


Solución: $x < -2$ o $0 < x < 1$

h) $\dfrac{4x^2}{6} \geqslant \dfrac{3(x+1)}{6} + \dfrac{8x}{6} \Leftrightarrow$

$4x^2 - 11x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(x-3)\left(x + \dfrac{1}{4}\right) \geqslant 0$



Solución: $x \leqslant -\dfrac{1}{4}$ o $x \geqslant 3$

2. $x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2) =$

$= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$

Igualando coeficientes: $r_1 + r_2 = -b$

$r_1 r_2 = c$

3. Para tener una única solución: $b^2 - 4ac = 0$.

$16r^2 - 4 \cdot 3r(r+1) = 0 \Leftrightarrow$

$4r^2 - 12r = 0 \Leftrightarrow r = 0$ o $r = 3$

$r = 0$ no es válido, pues la ecuación sería $1 = 0$.

Solución: $r = 3$.

4. Sea x el número. $x - 7 \cdot 5 < 47 \Rightarrow x < 82$

Solución: El número debe ser menor que 82.

5. Los números serán: $2n - 1$, $2n + 1$ y $2n + 3$ donde n es entero.

$4(2n - 1 + 2n + 1) = 2(2n + 1 + 2n + 3) \Leftrightarrow n = 1$

Solución: 1, 3 y 5 son los números buscados.

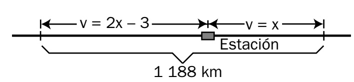
6. Sea A el número de kg de café tipo Arábica.

$5{,}7A + 6{,}6(30 - A) = 30 \cdot 6 \Leftrightarrow 0{,}9A = 18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = 20$

Solución: Hay que mezclar 20 kg de café tipo Arábica y 10 kg tipo Jamaica.

7. Sea x la velocidad en km/h de uno de los trenes.



$4x + 4(2x - 3) = 1\,188 \Leftrightarrow x = 100$

Las velocidades son 100 km/h y 197 km/h.

8. Sea x el número de fichas de 25 puntos.

$25x - 560 = 5 \cdot \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow 70x = 1\,680 \Leftrightarrow x = 24$

Álvaro tiene 24 fichas de veinticinco puntos y 8 fichas de cinco puntos.

9. a) Sea x el nuevo precio de venta. Según los datos, $x - 500$ tiene que ser múltiplo de 100. El beneficio mensual es la diferencia entre los ingresos y los gastos mensuales.

Ingresos: $I(x) = \left(4\,000 - \dfrac{x - 500}{100} \cdot 400\right) x$

Gastos: $G(x) = \left(4\,000 - \dfrac{x - 500}{100} \cdot 400\right) \cdot 200$

Beneficio mensual:

$B(x) = \left(4\,000 - \dfrac{x - 500}{100} \cdot 400\right)(x - 200)$

b) $B(x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (6\,000 - 4x)(x - 200) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1\,500 - x)(x - 200) > 0$

Solución: El precio tiene que ser superior a 200 euros e inferior a 1 500 euros.