4 Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

1. Resuelve las ecuaciones de primer grado:

a) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} - \frac{4x}{15} = 1 + \frac{22x}{15}$ b) $\frac{2x+5}{5} = 2 + x - \frac{x+3}{3}$ c) $\frac{5x-2}{4} - \frac{7x-3}{8} = \frac{x-1}{2}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(3x+1)\cdot(3x-1)}{9} = \frac{(x-5)\cdot(x+1)}{2} + \frac{(9x-1)\cdot(x+3)}{18} + \frac{8}{9}$

b) $\frac{(3x-7)\cdot(3x+7)}{6} = \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(2x+1)^2}{4}$

c) $\frac{x\cdot(x+1)}{15} + \frac{(x-5)^2}{5} + \frac{(x+3)^2}{3} = \frac{(3x+1)\cdot(3x-1)}{15}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $10x^2 + 11x - 6 = 0$ b) $-25x^2 + 25x - 4 = 0$ c) $(2x-1)\cdot(3x+1) = 6$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones, calculando previamente alguna solución entera:

a) $6x^3 + 13x^2 - 4 = 0$ b) $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1 = 0$ c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales. Recuerda que al final del proceso debes comprobar cuáles de las soluciones halladas son verdaderas y cuáles son falsas:

a) $x + \sqrt{x} = 132$ c) $2x - 1 - \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

b) $2x - 3 + \sqrt{2x+3} = 6$ d) $3\sqrt{3x-1} = 2\sqrt{3(2x-1)}$

6. Aplica el método de sustitución para resolver los siguientes sistemas de segundo grado:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x^2 + 3xy = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ y^2 + 2xy = -1 \end{cases}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales realizando un cambio de incógnita en los casos que consideres necesario:

a) $4^{2x-1} = 64$ b) $2^{2x^2-3x} = 4$ c) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $5 \log x = 10$ b) $\log(x - 27) = \log x - 1$

9. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{2x+1}{2} > 2 + \frac{x+8}{2}$ b) $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{4} - \frac{x-3}{8} < \frac{59}{8}$ c) $2x^2 - x - 6 \leqslant 0$

10. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ x + 4y + z = -5 \\ x + 3y + z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ x - 4y + 3z = 15 \\ 2x - y + 4z = 17 \end{cases}$

11. La suma de las edades de tres amigos es 52 años. Se sabe que Juan y Eva tienen la misma edad y que la suma de las edades de Eva y de Ana es 35 años. Calcula las edades de los tres.

5 Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -10x + 5y = -25 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases}$

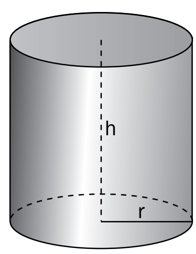
2. Resuelve encontrando previamente un sistema triangular equivalente:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ 2x - 3y = 1 \\ -2x + 4y - 3z = -4 \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -2x^2 + 7y^2 = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$

4. El volumen de un cilindro recto es 63π cm^3 y su altura es 1 cm mayor que el doble de la medida del radio. Encuentra las dimensiones del cilindro.



5. En un número de dos dígitos, el de las unidades excede en dos al triplo del de las decenas. Si se cambian los dígitos de posición, la diferencia entre el nuevo número y el original es de 36 unidades. ¿Cuál es el número inicial?

6. Se quiere repartir 17 200 euros entre tres socios de modo que por cada 2 euros que reciba el primero, el segundo reciba 3 y no sobre ningún euro, y por cada 5 euros que reciba el segundo, el tercero reciba 6 y tampoco sobre ninguno. ¿Cuánto dinero recibirá cada socio?

7. Resuelve geométricamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y < 0 \\ x + y \geqslant 1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. a) $5x + 6x - 4x = 15 + 22x \Rightarrow x = -1$

b) $6x + 15 = 30 + 15x - 5x - 15 \Rightarrow x = 0$

c) $10x - 4 - 7x + 3 = 4x - 4 \Rightarrow x = 3$

2. a) $2(9x^2 - 1) =$

$= 9(x^2 - 4x - 5) + 9x^2 + 26x - 3 + 16$

$18x^2 - 2 = 18x^2 - 10x - 32 \Rightarrow x = -3$

b) $2(9x^2 - 49) =$

$= 6(x^2 - 4x + 4) + 3(4x^2 + 4x + 1)$

$12x = 125 \Rightarrow x = \dfrac{125}{12}$

c) $x^2 + x + 3(x^2 - 10x + 25) + 5(x^2 + 6x + 9) =$

$= 9x^2 - 1$

$x = -121$

3. a) $x = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121 + 240}}{20} \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}, x = -\dfrac{3}{2}$

b) $x = \dfrac{-25 \pm \sqrt{625 - 400}}{-50} \Rightarrow x = \dfrac{1}{5}, x = \dfrac{4}{5}$

c) $6x^2 - x - 7 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{12} \Rightarrow x = \dfrac{7}{6}, x = -1$

4. a) $(x + 2)\,(6x^2 + x - 2) = 0$

$x = -2, x = \dfrac{1}{2}, x = -\dfrac{2}{3}$

b) $(x - 1)\,(12x^2 - 7x + 1) = 0$

$x = 1, x = \dfrac{1}{3}, x = \dfrac{1}{4}$

c) $(x + 1)\,(x - 1) \cdot (4x^2 - 1) = 0$

$x = 1, x = -1, x = \dfrac{1}{2}, x = -\dfrac{1}{2}$

5. a) $x = (132 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 265x + 17\,424 = 0$
$x = 121 (x = 144$ falsa$)$

b) $2x + 3 = (9 - 2x)^2 \Rightarrow 2x^2 - 19x + 39 = 0$
$x = 3 (x = 6{,}5$ falsa$)$

c) $(2x - 1)^2 = 6x^2 - 12x + 7 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 1, x = 3$

d) $9(3x - 1) = 12(2x - 1) \Rightarrow 3x = -3$

$(x = -1$ falsa$)$.

La ecuación no tiene ninguna solución.

6. a) $\begin{cases} y = 5 - 2x \\ 2x^2 + 3x(5 - 2x) = 14 \end{cases}$

$-4x^2 + 15x - 14 = 0$

$(x = 2, y = 1); \left(x = \dfrac{7}{4}, y = \dfrac{3}{2}\right)$

b) $\begin{cases} x = 4 + 3y \\ y^2 + 2y(4 + 3y) = -1 \end{cases}$

$7y^2 + 8y + 1 = 0$

$\left(x = \dfrac{25}{7}, y = -\dfrac{1}{7}\right); (x = 1, y = -1)$

7. a) $4^{2x-1} = 4^3 \Rightarrow x = 2$

b) $2^{2x^2-3x} = 2^2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$x = 2, x = -\dfrac{1}{2}$

c) $3 \cdot 3^x + \dfrac{1}{3} \cdot 3^x = 30 \Rightarrow 3^x = 9 = 3^2$

$x = 2$

8. a) $\log x = 2 = \log 100 \Rightarrow x = 100$

b) $\log (x - 27) = \log x - \log 10 = \log \left(\dfrac{x}{10}\right)$

$x - 27 = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 30$

9. a) $x > 11$

b) $5x - 5 < 59 \Rightarrow x < \dfrac{64}{5}$

c) $(x - 2)\,(2x + 3) \leqslant 0 \Rightarrow -\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$

10. a) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2y + 2z = 0 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ -9y + 9z = 18 \\ 6y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ -y + 5z = 16 \\ 33z = 99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$

11. Edades (en años): Juan x, Eva x y Ana $35 - x$.

$x + x + 35 - x = 52 \Rightarrow x = 17$

Por tanto, Juan y Eva tienen 17 años cada uno y Ana tiene 18 años.

SOLUCIONES

1. a) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x = 11 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1,\ y = -2$

b) Se divide la 2.ª ecuación por -5:

$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 5$

Infinitas soluciones

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 12y = 4 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases}$

Sumando las ecuaciones se obtiene $0 = 11$; por tanto, el sistema no tiene solución.

2. a) Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª, y a la 3.ª dos veces la 1.ª:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + 2z = 2 \\ -y - 2z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Simplificando la 2.ª} \\ \text{3.ª} - \text{2.ª} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + z = 1 \\ -3z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = 3 \\ y = z - 1 = 2 \\ x = z - y = 1 \end{matrix}$$

b) Restando a la 2.ª la 1.ª y sumando a la 3.ª la 1.ª:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ -2y + z = -4 \\ 3y - 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow (\text{3.ª} + 4 \cdot \text{2.ª})$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ -2y + z = -4 \\ -5y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 3 \\ z = 2 \\ x = 5 \end{matrix}$$

3. a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y^2 = 36 \iff y = \sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

Solución: $x = y = +3\sqrt{2}$; $x = y = -3\sqrt{2}$

b) Sumando a la 2.ª dos veces la 1.ª:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 9y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow$

$y^2 = \dfrac{25}{9} \iff y = \pm\dfrac{5}{3} \Rightarrow x^2 = 4 - y^2 = \dfrac{11}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pm\sqrt{11}}{3};\ y = \pm\dfrac{5}{3}$

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ (4 - y)y = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y - y^2 = 3 \iff y = 3,\ y = 1$

Para $y = 3$, $x = 1$; para $y = 1$, $x = 3$.

4. El volumen del cilindro es igual al área de la base por la altura. Si h representa la medida de la altura en centímetros, se tiene: $63\pi = \pi r^2 h$, donde r representa la medida del radio de la base.

Como $h = 2r + 1$ se obtiene:

$63\pi = \pi r^2 (2r + 1) \iff 2r^3 + r^2 - 63 = 0 \iff$

$\iff (r - 3)(2r^2 + 7r + 21) = 0$

La ecuación de segundo grado $2r^2 + 7r + 21 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$ ya que su discriminante es negativo; por tanto, la única solución de la ecuación es $r = 3$; $h = 7$.

El radio mide 3 cm y la altura 7 cm.

5. Sean x las decenas e y las unidades del número, que se expresa $10x + y$.

$\begin{cases} y - 2 = 3x \\ (10y + x) - (10x + y) = 36 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ -x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 2x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 5 \end{matrix}$

El número buscado es 15.

6. Sean A, B y C los euros que reciben el primer, segundo y tercer socio, respectivamente.

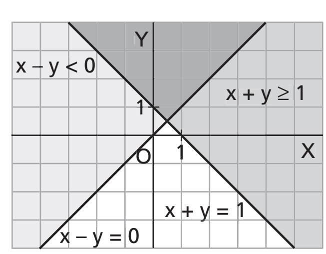
$$\begin{cases} A + B + C = 17\,200 \\ \dfrac{A}{2} = \dfrac{B}{3} \\ \dfrac{B}{5} = \dfrac{C}{6} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$C = 7\,200$; $B = 6\,000$; $A = 4\,000$

Solución: El primer socio recibe 4 000 euros, el segundo 6 000 y el tercero 7 200 euros.

7.



5 Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

1. Discute los siguientes sistemas y resuelve los que sean compatibles determinados:

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$

2. En unos grandes almacenes un señor compra 2 trajes de chaqueta, 1 cazadora y 2 pantalones. Paga 530 euros. En la caja contigua, otra persona está pagando 840 euros por 3 trajes de chaqueta, 3 cazadoras y unos pantalones. Al día siguiente hay una oferta en la que se hace un 10 % de descuento, y un chico ha pagado 225 euros por un traje de chaqueta y una cazadora. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

3. Una ecuación lineal con dos incógnitas de la forma $ax + by + c = 0$ es la expresión de una recta en el plano. Según esto, las rectas del plano expresadas por las ecuaciones de los siguientes sistemas, ¿serán paralelas, secantes o coincidentes?

a) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ -6x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 7y + 2 = 0 \\ 10x - 14y - 18 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x - 7y - 4 = 0 \end{cases}$

4. Dadas las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

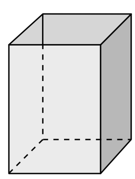
Escribe una tercera ecuación para que el sistema resultante sea incompatible.

5. Si se mezclan x partes de aceite de oliva virgen con y partes de aceite de oliva refinado ($y \neq x$), la mezcla resultante tiene un precio de A euros el litro. Si se mezclan y partes de aceite de oliva virgen y x partes de refinado, el precio del litro de la mezcla es de B euros.

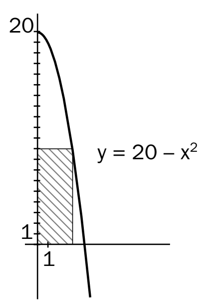
a) Halla el valor del litro de aceite de cada clase.

b) Si $A = B$, ¿qué se puede decir de los precios de los dos tipos de aceite?

6. Se quiere construir un depósito de 32 m^3, con forma de prisma cuadrangular, excavado en la tierra y sin cubrir. Si la superfice de la base y de las caras laterales debe ser de 68 m^2, calcula las dimensiones del lado de la base y de la altura.



7. Observa la figura adjunta. Se quiere construir un rectángulo en el primer cuadrante, limitado por los ejes de coordenadas y la gráfica de $y = 20 - x^2$. Calcula las dimensiones del rectángulo, si su área tiene que ser de 16 unidades cuadradas.



SOLUCIONES

1. a) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Tiene infinitas soluciones; por tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado.

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y - 4z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y - 4z = 3 \\ 2z = -2 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

Solución: $z = -1$; $y = -1$; $x = 6$.

2. Sean x, y, z los precios en euros del traje de chaqueta, la cazadora y los pantalones, respectivamente.

$\begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3x + 3y + z = 840 \\ 0{,}9x + 0{,}9y = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3x + 3y + z = 840 \\ 9x + 9y = 2\,250 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3y - 4z = 90 \\ 9y - 18z = -270 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3y - 4z = 90 \\ -6z = -540 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 90 \\ y = 150 \\ x = 100 \end{array}$

Solución: Los precios del traje de chaqueta, la cazadora y los pantalones son 100, 150 y 90 euros, respectivamente.

3. a) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ -6x + 3y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y + 15 = 0 \\ -6x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$

Sistema compatible indeterminado. Las rectas son **coincidentes**, pues tienen en común infinitos puntos.

b) $\begin{cases} 5x - 7y + 2 = 0 \\ 10x - 14y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 7y + 2 = 0 \\ -22 = 0 \end{cases}$

Sistema incompatible. Las rectas no tienen ningún punto común, luego son **paralelas**.

c) $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x - 7y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ -3y + 6 = 0 \end{cases}$

Sistema compatible determinado. Las rectas tienen un único punto en común; son **secantes**.

4. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$

$y = z$; $x = -y + 2z = -z + 2z = z$

Las soluciones del sistema formado son de la forma: $x = y = z$. Para obtener un sistema incompatible se añade una ecuación en la que $x = y = z$ no sea solución; por ejemplo:

$x - 2y + z = 5$ (si $x = y = z$, $x - 2y + z = 0$)

5. Sean v y r los precios del litro de aceite de oliva virgen y refinado, respectivamente.

a) $\begin{cases} x\,v + y\,r = (x + y)A \\ x\,r + y\,v = (x + y)B \end{cases}$

Restando a la 1.ª multiplicada por x, la 2.ª por y:

$(x^2 - y^2)v = (x + y)(xA - yB) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + y)(x - y)v = (x + y)(xA - yB) \Rightarrow$

$\Rightarrow v = \dfrac{xA - yB}{x - y}$, pues $x - y \neq 0$

Restando a la 1.ª multiplicada por y, la 2.ª por x:

$(y^2 - x^2)r = (x + y)(yA - xB)$

$(y + x)\,(y - x)r = (x + y)\,(yA - xB) \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{yA - xB}{y - x}$, pues $y - x \neq 0$

Solución: El litro de aceite de oliva virgen cuesta $v = \dfrac{xA - yB}{x - y}$ euros y el de aceite de oliva refinado $r = \dfrac{yA - xB}{y - x}$ euros.

b) Si $A = B$, los precios de ambos tipos coinciden.

6. Sean x e y las medidas en metros del lado de la base y de la altura, respectivamente.

Volumen: x^2y. Superficie de la base: x^2

Superficie de las caras laterales: $4xy$

$\begin{cases} x^2y = 32 \\ x^2 + 4xy = 68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{32}{x^2} \\ x^2 + \dfrac{4 \cdot 32}{x} = 68 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 - 68x + 128 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 64) = 0$

Soluciones del sistema:

$x = 2, x = -1 + \sqrt{65} = 7{,}06, x = -1 - \sqrt{65} = -9{,}06$

La última solución no es válida como medida del lado de un cuadrado. Así pues, hay dos soluciones: base 2 m y altura 8 m o base 7,06 m y altura 0,64 m.

7. $16 = xy = x(20 - x^2) \Leftrightarrow x^3 - 20x + 16 = 0$

Una solución de la ecuación es: $x = 4$

Factorizando: $(x-4)(x^2+4x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x = 4$, $x = -2 \pm 2\sqrt{2}$; la negativa no puede representar una longitud.

Se obtienen dos posibles rectángulos:

$\Leftrightarrow x = 4, y = 4$

$x = -2 + 2\sqrt{2} = 0{,}8284$, $y = 19{,}31$