12 Tasas de variación y derivadas

1. a) Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 3x^2 - x$ en el intervalo $[2, 4]$.

b) Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = -x^2 + x + 2$ en el intervalo $[-2, 2]$.

2. a) Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 2$ en el intervalo $[2, 2+h]$.

b) Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x - 3x^2 + 1$ en el intervalo $[-2, -2+h]$.

3. Aplicando la definición, calcula la derivada de la función $f(x) = 3x^2$ en el punto $x = -5$.

4. Aplicando la definición, calcula la derivada de la función $f(x) = x^3 + 2x^2$ en el punto $x = 2$.

5. Aplicando la definición, calcula la función derivada de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

6. Un móvil se desplaza según la ecuación $s(t) = 2t^2 - 2t + 3$, donde t es el tiempo en segundos y $s(t)$ es el desplazamiento en metros efectuado después de t segundos.

a) Calcula la velocidad media del móvil en el intervalo $[0, 2]$.

b) Calcula la velocidad del móvil cuando han pasado exactamente 3 segundos.

7. Estudia la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ de la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

8. Estudia la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

9. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \dfrac{|x^2 - x|}{x}$ y comprueba tus resultados representando gráficamente esta función.

10. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} a + \mathrm{L}(1 + x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 + ax + a^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ según los valores del parámetro a.

11. Determina el valor de los parámetros a y b para que la función $\begin{cases} x^3 + 3 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real. Para esos valores, ¿la función es derivable en $x = 0$?, ¿y en $x = 1$?

SOLUCIONES

1. a) $\text{TVM}(f(x), [2, 4]) = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{44 - 10}{2} = 17$

b) $\text{TVM}(f(x), [2, 2]) = \dfrac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \dfrac{0 - (-4)}{4} = 1$

---

2. a) $\text{TVM}(f(x), [2, 2+h]) = \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{2 + h - 2} =$

$= \dfrac{2 \cdot (2 + h)^2 - 2 - 6}{h} = \dfrac{2h^2 + 8h}{h} =$

$= 2h + 8$

b) $\text{TVM}(f(x), [-2, -2 + h]) =$

$= \dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{-2 + h + 2} =$

$= \dfrac{-2 + h - 3 \cdot (-2 + h)^2 + 1 + 13}{h} =$

$= \dfrac{-3h^2 + 13h}{h} = -3h + 13$

---

3. $f'(-5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-5 + h) - f(-5)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^2 - 30h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3h - 30) = -30$

---

4. $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 + 2 \cdot (2 + h) - 16}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3 + 8h^2 + 20h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h^2 + 8h + 20) = 20$

---

5. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - 5(x + h) + 6 - x^2 + 5x - 6}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2xh - 5h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h + 2x - 5) = 2x - 5$

---

6. a) $\text{TVM}[0, 2] = \dfrac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \dfrac{7 - 3}{2} = 2$ m/s

b) $\text{TVI}(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(3 + h) - s(3)}{h} = 10$ m/s

---

7. $f(x)$ es continua en $x = 0$, ya que:

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

No es derivable en $x = 0$, ya que:

$f'(0^-) = 1$ y $f'(0^+) = 0$

$Df(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

---

8. $f(x)$ es continua en $x = 0$, ya que:
$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$; es derivable en $x = 0$, ya que: $f'(0) = 0$

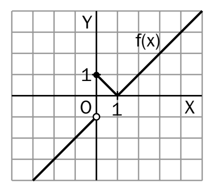
$Df(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 3x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

---

9. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(x)$ es discontinua en $x = 0$, ya que:
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 2. En el resto de los valores es continua. $f(x)$ no es derivable en $x = 0$, por no ser continua, ni en $x = 1$, ya que en ese punto $f'(1^-) = -1$ y $f'(1^+) = 1$

$Df(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



---

10. Para que sea continua en $x = 0$:

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow a = a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0, a = 1$

Como $Df(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x} & \text{si } x < 0 \\ 2x + a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ para que sea derivable en $x = 0$: $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a = 1$

---

11. Para que sea continua en $x = 0$:
$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow 3 = b$,
y para que sea continua en $x = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow a = -2$

La función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{si } x < 0 \\ -2x + 3 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ es continua en toda la recta real, pero no es derivable en $x = 0$, su derivada es:

$D\,f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y las derivadas laterales en $x = 0$ son distintas.

12 Tasas de variación y derivadas

1. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

2. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x} & \text{si } -1 \leq x \text{ y } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = |(x-1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3)^3|$

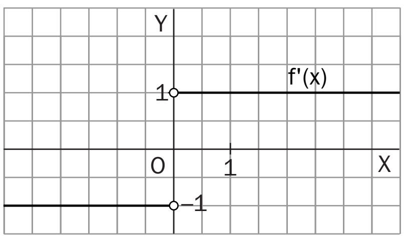
4. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, se considera la función $S(x)$ que expresa el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y la perpendicular a dicho eje trazada por el punto $(x, 0)$. Determina la expresión analítica de la funcion $S(x)$ y estudia su continuidad y su derivabilidad.

5. Demuestra que la derivada de una función derivable par es una función impar y que la derivada de una función derivable impar es una función par.

6. ¿Cómo deben elegirse los parámetros a y b de la función $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{si } x > x_0 \end{cases}$ para que sea continua y derivable en el punto x_0, teniendo en cuenta que la función $f(x)$ es derivable por la izquierda en $x = x_0$?

7. ¿Cómo deben elegirse los parámetros a y b de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{si } x > x_0 \end{cases}$ para que sea continua y derivable en $x = x_0$?

8. De una función $f(x)$ continua en todo **R** se conoce la gráfica de su derivada, que es la que corresponde a la figura adjunta, y se sabe además que $f(0) = 1$. Dibuja la gráfica de $f(x)$ y encuentra su expresión analítica.



9. Calcula las derivadas laterales de la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{7x^2 + 5}{2} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en el punto $x = -1$. Indica si la función es o no derivable en ese punto.

10. Si la función $y = f(x)$ verifica que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y la función $y = g(x)$ es acotada, es decir, existe un número real M tal que $|g(x)| \leq M$ para todos los valores de x, entonces se cumple que $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = 0$. Con la ayuda de este resultado, estudia la continuidad y derivabilidad en el origen de coordenadas de la función $f(x) = x^2 \cdot \text{sen } x$.

11. Dada la función $f(x) = |x| + |x + 1|$:

a) Exprésala mediante una función definida a trozos.

b) Represéntala gráficamente.

c) Estudia la continuidad y derivabilidad en todo el dominio.

SOLUCIONES

1. $f(x)$ es discontinua en $x = -1$, ya que: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$. Tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 1. En el resto de los valores es continua.
$f(x)$ no es derivable en $x = -1$, por no ser continua, ni en $x = -3$ y $x = 2$, ya que en estos puntos las derivadas laterales son distintas:
$f'(-3^-) = -1$ y $f'(-3^+) = 1$, $f'(2^-) = 4$ y $f'(2^+) = 2$

2. $f(x) = \begin{cases} \text{signo}(x) \cdot \sqrt{1 + x} & \text{si } -1 \leqslant x \text{ y } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

No es derivable en $x = 0$, ya que no es continua en ese punto: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

3.
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & \text{si } 1 < x \leqslant 3 \\ (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\mathrm{D}\, f(x) = \begin{cases} (x-2)(x-3)^2[6x^2-22x+18] & \text{si } x < 1 \\ -(x-2)(x-3)^2[6x^2-22x+18] & \text{si } 1 < x \leqslant 3 \\ (x-2)(x-3)^2[6x^2-22x+18] & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

No es derivable en $x = 1$, ya que las derivadas laterales son distintas: $f'(1^-) = -8$ y $f'(1^+) = 8$.

4.
$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 + 2(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)(2x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$S(x)$ es continua en $[0, \infty)$, ya que lo es en $x = 2$:
$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

es derivable en $(0, \infty)$; $\mathrm{D}S(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

ya que $f'(2^-) = f'(2^+) = 2$

5. $f(x)$ función derivable par:

$$\mathrm{D}\, f(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x + h) - f(-x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(-(x - h)) - f(-x)}{h} =$$
$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x - h) - f(x)}{-h} = -\mathrm{D}\, f(x)$$

$f(x)$ función derivable impar:

$$\mathrm{D}\, f(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x + h) - f(-x)}{h} =$$
$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(-(x - h)) - f(-x)}{h} =$$
$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x - h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x - h) - f(x)}{-h} =$$
$$= \mathrm{D}\, f(x)$$

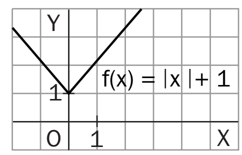
6. Para que sea continua:
$F(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} F(x) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) \Rightarrow f(x_0) = ax_0 + b$

Para que sea derivable: $F'(x_0^-) = F'(x_0^+) \Rightarrow f'(x_0^-) = a$.
Por lo tanto, $a = f'(x_0^-)$ y $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0^-)$.

7. Para que sea continua
$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Rightarrow x_0^2 = ax_0 + b$

Para que sea derivable $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \Rightarrow 2x_0 = a$.
Por tanto, $a = 2x_0$ y $b = -x_0^2$

8. $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -x + b & \text{si } x < 0 \end{cases}$



Como la función debe ser continua en 0:
$a = b = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$f(x) = |x| + 1$

9.
$$f'(-1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{7(-1 + h)^2 + 5}{2} - 6}{h} = -7$$
$$f'(-1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{2(-1+h)^2 - 3(-1+h) + 1 - 6}{h} = -7$$

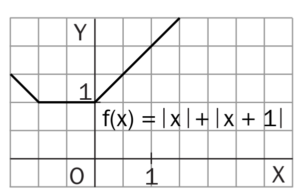
La función es derivable. La derivada es $f'(-1) = -7$.

10. $f(x)$ cumple las condiciones del enunciado, entonces: $\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \operatorname{sen} x = 0$, ya que $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ y $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$. Además:
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \operatorname{sen} h}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \mathrm{h} \cdot \operatorname{sen} \mathrm{h} = 0$$

La función es continua y derivable en $x = 0$.

11.
a) $f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

b)



c) La función es continua en todo **R**.
La función es derivable en todo **R** excepto en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.