

MATEMATICAS. BC2 TEMA 10: Representación de funciones

Representar las siguientes funciones, estudiando: Dominio. Simetría. Puntos de corte con los ejes y asíntotas. Asíntotas y ramas parabólicas. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

1. $f(x) = 3x - x^3$

2. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

3. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

4. $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

5. $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$

6. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

7. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$

8. $f(x) = x + \sqrt{x}$

9. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

10. $f(x) = (x-1)e^{-x}$

11. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

12. $f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x-1}$

SOLUCIONES

Ejercicio 1:

Dominio $D = \mathbb{R}$

Simetría $f(-x) = 3(-x) - (-x^3) = -(3x - x^3) = -f(x)$; Simetría respecto al origen.

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $3x - x^3 = 0$ $x = \pm\sqrt{3}$ $x = 0$ $(-\sqrt{3}, 0)$ $(0, 0)$ $(\sqrt{3}, 0)$

Punto de corte con OY: $(0, 0)$

Asíntotas No tiene asíntotas.

Ramas parabólicas $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - x^3)}{x} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x - x^3)}{x} = -\infty$

Crecimiento y decrecimiento $f'(x) = 3 - 3x^2$ $3 - 3x^2 = 0$; $x = +1, -1$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$	
$f'(x)$	-	+	-	
	↘	↗	↘	

Creciente: $(-1, 1)$ Decreciente: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Mínimos $(-1, -2)$ **Máximos** $(1, 2)$

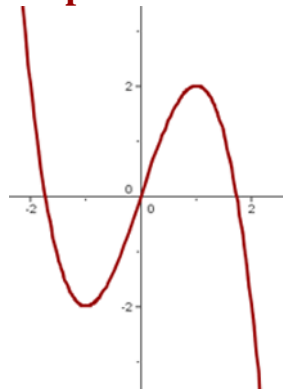
Concavidad y convexidad $f''(x) = -6x$ $-6x = 0$ $x = 0$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	
$f''(x)$	+	-	
	∪	∩	

Cóncava: $(-\infty, 0)$ Convexa $(0, \infty)$

Puntos de inflexión $(0, 0)$

Representación gráfica



Ejercicio 2:

Dominio $D = \mathbb{R}$

Simetría $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 8$ Simetría respecto al eje OY.

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ $x = \pm 2$; $(-2, 0)$ $(2, 0)$

Punto de corte con OY: $(0, -8)$

Asíntotas No tiene asíntotas.

Ramas parabólicas $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x} = \infty$

Crecimiento y decrecimiento $f'(x) = 4x^3 - 4x$ $4x^3 - 4x = 0$ $x = 0$ $x = \pm 1$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-	+
	↘	↗	↘	↗

Creciente : $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ **Decreciente** : $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Mínimos Mínimo $(-1, -9)$ Mínimo $(1, -9)$

Máximos Máximo $(0, -8)$

Concavidad y convexidad $f''(x) = 12x^2 - 4$ $12x^2 - 4 = 0$ $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

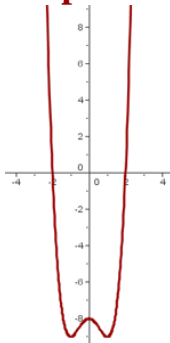
x $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

$f''(x)$ + - +
 ∪ ∩ ∪

Cóncava : $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ **Convexa** : $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Puntos de inflexión $\left(-\sqrt{3}, -\frac{77}{9}\right)$ $\left(\sqrt{3}, -\frac{77}{9}\right)$

Representación gráfica



Ejercicio 3:

Dominio $(x - 1)^2 = 0$ $x = 1$ $D = \mathbb{R} - \{1\}$

Simetría $f(-x) = \frac{-x^3}{(-x-1)^2}$ **No presenta simetría**

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $\frac{x^3}{(x-1)^2} = 0$ **(0, 0)**

Punto de corte con OY: **(0, 0)**

Asíntotas Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$ **No tiene**

Asíntotas verticales. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$ **$x = 1$**

Asíntota oblicua. $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = 1$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = 2$ **$y = x + 2$**

Crecimiento y decrecimiento $f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$ $\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0$; $x = 0$ $x = 3$

x $(-\infty, 0)$ $(0, 1)$ $(1, 3)$ $(3, \infty)$
 $f'(x)$ + + - +
 ↗ ↗ ↘ ↗

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$

Decreciente $(1, 3)$

Mínimos $\left(3, \frac{27}{4}\right)$

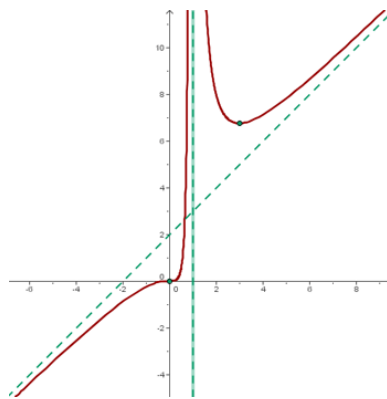
Concavidad y convexidad $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} \quad \frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \quad x = 0$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+	+
	∩	∪	∪

Cóncava $(0, 1) \cup (1, \infty)$ Convexa $(-\infty, 0)$

Puntos de inflexión P.I. $(0, 0)$

Representación gráfica



Ejercicio 4:

Dominio $x^2 = 0 \quad x = 0 \quad D = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + 1}{(-x)^2} = f(x)$$

Simetría

Simetría respecto al eje OY.

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $\frac{x^4 + 1}{x^2} = 0 \quad x^4 + 1 = 0 \quad x = \pm \sqrt[4]{-1}$

No hay puntos de corte con el eje OX

Punto de corte con OY: $f(0) = \frac{0^4 + 1}{0^2} = \frac{1}{0}$

No hay puntos de corte con el eje OY

Asíntotas

Asíntota horizontal $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2} = \infty$ No tiene

Asíntotas verticales. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2} = \infty$ $x = 0$

Asíntota oblicua. $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$ No tiene

Ramas parabólicas $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^2} = \frac{x^4 + 1}{x^3} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^2} = \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$

Crecimiento y decrecimiento $f'(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$ $\frac{2(x^4 - 1)}{x^3} = 0$ $x = \pm 1$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-	+
	↘	↗	↘	↗

Creciente: $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ **Decreciente:** $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Mínimos **Mínimo** $(-1, 2)$ **Mínimo** $(1, 2)$

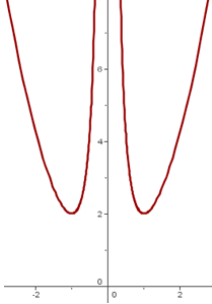
Concavidad y convexidad $f''(x) = \frac{2(x^4 + 3)}{x^4}$ $2(x^4 + 3) = 0$ $x = \sqrt[4]{-3}$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	+	+
	∪	∪

Cóncava: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Puntos de inflexión No hay punto de inflexión.

Representación gráfica



Ejercicio 5:

Dominio $2 - x = 0$ $x = 2$ $D = \mathbb{R} - \{2\}$

Simetría $f(-x) = \frac{(-x)^2}{2 - (-x)} = \frac{x^2}{2 + x}$ **No presenta simetría**

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $\frac{x^2}{2 - x} = 0$ $(0, 0)$

Punto de corte con OY: $(0, 0)$

Asíntotas

Asíntota horizontal $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2 - x} = \infty$ **No tiene**

Asíntotas verticales. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2 - x} = \infty$ $x = 2$

Asíntota oblicua. $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2 - x} = -1$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2 - x} + x \right) = -2$ $y = -x - 2$

Crecimiento y decrecimiento $f'(x) = \frac{4x - x^2}{(2 - x)^2}$ $\frac{4x - x^2}{(2 - x)^2} = 0$ $x = 0$ $x = 4$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
	↘	↗	↘

Creciente: $(0, 4)$; **Decreciente:** $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

Mínimos **Mínimo (0,0)** **Máximos (4,-8)**

$$f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3} \quad \frac{8}{(2-x)^3} = 0 \quad \text{Sin solución}$$

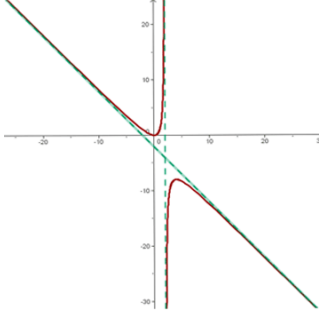
Concavidad y convexidad

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	+	-
	∪	∩

Cóncava: $(-\infty, 2)$ **Convexa: $(2, \infty)$**

Puntos de inflexión No hay punto de inflexión.

Representación gráfica



Ejercicio 6:

Dominio $1+x^2=0$ $D = \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -f(x)$$

Simetría

Simetría respecto al origen.

Puntos de corte con los ejes

Punto de corte con OY: $\frac{x}{1+x^2} = 0$ **(0,0)**

Puntos de corte con el eje OY **(0,0)**

Asíntotas

Asíntota horizontal $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ **$y = 0$**
 No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
	↘	↗	↘

Creciente: $(-1, 1)$; **Decreciente: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$**

Mínimos **Mínimo $(-1, -\frac{1}{2})$** **Máximos** **Máximo $(1, \frac{1}{2})$**

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^2} \quad \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad x = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$$

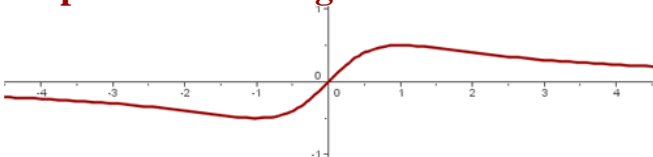
Concavidad y convexidad

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
	∩	∪	∩	∪

Cóncava: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ **Convexa: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$**

Puntos de inflexión: $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$ **$(0, 0)$** **$(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$**

Representación gráfica



Ejercicio 7:

Dominio $x^2 + 1 = 0 \quad x = \pm\sqrt{-1}$

$D = \mathbb{R}$

Simetría $f(-x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$

No presenta simetría

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0 \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (2,0) \quad (1,0)$

Punto de corte con OY: $f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 + 2}{0^2 + 1} = 2 \quad (0,2)$

Asíntotas Asíntota horizontal $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 1 \quad y = 1$

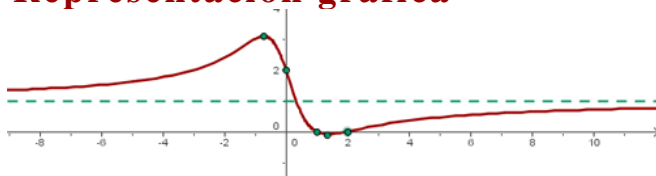
No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento: $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} \quad \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} = 0 \quad x = \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \quad x = \frac{1 - \sqrt{10}}{3}$

$x \quad \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{10}}{3}\right) \quad \left(\frac{1 - \sqrt{10}}{3}, \frac{1 + \sqrt{10}}{3}\right) \quad \left(\frac{1 + \sqrt{10}}{3}, \infty\right)$
 $f'(x) \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \uparrow$
 Creciente: $\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{10}}{3}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{10}}{3}, \infty\right)$; Decreciente $\left(\frac{1 - \sqrt{10}}{3}, \frac{1 + \sqrt{10}}{3}\right)$

Máximos $\left(\frac{1 - \sqrt{10}}{3}, 3.08\right)$ **Mínimos** $\left(\frac{1 + \sqrt{10}}{3}, -0.08\right)$

Representación gráfica



Ejercicio 8:

Dominio $x + \sqrt{x} = 0 \quad x \geq 0 \quad D = [0, \infty)$

Simetría $f(-x) = -x + \sqrt{-x}$ No presenta simetría.

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $x + \sqrt{x} = 0 \quad x = 0 \quad (0,0)$

Punto de corte con OY: $(0,0)$

Asíntotas No tiene asíntotas.

Crecimiento y decrecimiento $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = 0$

$2\sqrt{x} + 1 = 0 \quad \sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ Sin solución; $f'(x) \quad \quad \quad \uparrow$ **Creciente: $(0, \infty)$**

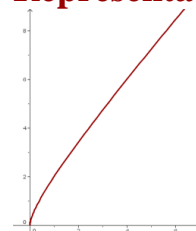
Máximo y mínimos No existen extremos locales.

Concavidad y convexidad $f''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} \quad \frac{-1}{4x\sqrt{x}} = 0$ Sin solución

$x \quad (0, \infty)$
 $f''(x) \quad \quad \quad \downarrow$
Convexa: $(0, \infty)$

Puntos de inflexión No hay punto de inflexión.

Representación gráfica



Ejercicio 9:

Dominio $D = \mathbb{R} - \{0\}$

Simetría $f(-x) = e^{-\frac{1}{x}}$ No presenta simetría.

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $e^{\frac{1}{x}} = 0$

Punto de corte con OY: $f(0) = e^{\frac{1}{0}}$ **No tiene puntos de corte con los ejes**

Asíntotas

Asíntota horizontal $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ $y = 1$

Asíntotas verticales. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ $x = 0$

Crecimiento y decrecimiento $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ $-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = 0$ $e^{\frac{1}{x}} = 0$ Sin solución

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	-
	↘	↘

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Máximo y mínimos No existen extremos locales.

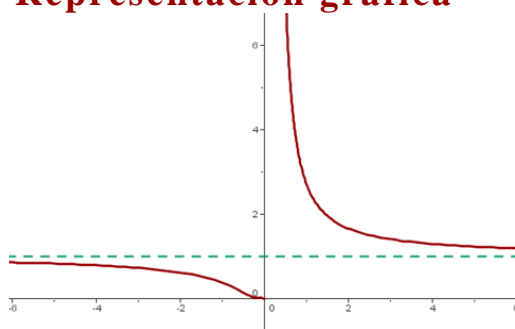
Concavidad y convexidad $f''(x) = \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)$ $\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1) = 0$

$\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \\ 2x + 1 = 0 \end{cases}$	Sin solución	x	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \infty)$
	$x = -\frac{1}{2}$	$f''(x)$	-	+	+
			∩	∪	∪

Cóncava: $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$ **Convexa:** $(-\infty, -\frac{1}{2})$

Puntos de inflexión P.I. $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$

Representación gráfica



Ejercicio 10:

Dominio $D = \mathbb{R}$

Simetría $f(-x) = (-x - 1)e^x$ No presenta simetría.

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $(x - 1)e^{-x} = 0$ $(1, 0)$

Punto de corte con OY: $f(0) = (0 - 1)e^0$ $(0, -1)$

Asíntotas

Asíntota horizontal $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{e^x} = 0$ $y = 0$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-
	↗	↘

$$f'(x) = e^{-x}(2-x)$$

$$2-x=0$$

$$x=2$$

Creciente: $(-\infty, 2)$ Decreciente: $(2, \infty)$

Máximos Máximo $(2, e^{-2})$

Concavidad y convexidad

x	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	-	+
	∩	∪

$$f''(x) = e^{-x}(x-3)$$

$$x-3=0$$

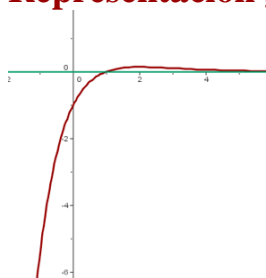
$$x=3$$

Cóncava: $(3, \infty)$

Convexa: $(-\infty, 3)$

Puntos de inflexión P.I. $(3, 2e^{-3})$

Representación gráfica



Ejercicio 11:

Dominio

$$x > 0$$

$$D = (0, \infty)$$

Simetría

$$f(-x) = \frac{\ln(-x)}{-x}$$

No presenta simetría.

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $\frac{\ln x}{x} = 0$

$$\ln x = 0$$

$$e^0 = x \quad ; \quad (1, 0)$$

Punto de corte con OY: $f(0) = \frac{\ln 0}{0}$

No corta al eje OY

Asíntotas

Asíntota horizontal $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$y = 0$$

Asíntotas verticales $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \infty$

$$x = 0$$

Crecimiento y decrecimiento

x	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	+	-
	↗	↘

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\frac{1-\ln x}{x^2} = 0$$

$$1-\ln x = 0$$

$$x = e$$

Creciente: $(0, e)$

Decreciente: (e, ∞)

Máximos Máximo (e, e^{-1})

Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$$\frac{2\ln x - 3}{x^3} = 0 \quad ; \quad 2\ln x - 3 = 0$$

$$\ln = \frac{3}{2}$$

$$e^{\frac{3}{2}} = x$$

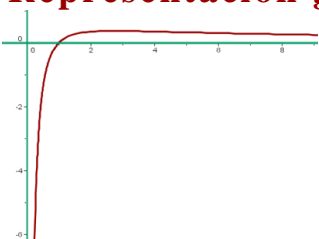
x	$(0, e^{\frac{3}{2}})$	$(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$
$f''(x)$	-	+
	∩	∪

Cóncava: $(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$

Convexa: $(0, e^{\frac{3}{2}})$

Puntos de inflexión P.I. $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$

Representación gráfica



Ejercicio 12:

Dominio $x - 1 = 0$ $D = \mathbb{R} - \{1\}$

Simetría $f(-x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1} = \frac{x^2 + x - 4}{-x - 1}$ **No presenta**

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX: $\left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}, 0\right)$ $\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, 0\right)$

Punto de corte con OY: $f(x) = \frac{0^2 - 0 - 4}{0 - 1} = (0, 4)$

Asíntotas

Asíntota horizontal $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 4}{x - 1} = \infty$ **No tiene**

Asíntotas verticales. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 4}{x - 1} = \infty$ **$x = 1$**

Asíntota oblicua. $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 4}{x - 1} = 1$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 4}{x - 1} - x\right) = 0$ **$y = x$**

Crecimiento y decrecimiento $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2}$ $x^2 - 2x + 5 = 0$ **Sin solución real**

x	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	+
	↗	↗

Creciente: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

Máximo y mínimos No existen extremos locales.

Concavidad y convexidad $f''(x) = \frac{-8}{(x - 1)^3}$ $\frac{-8}{(x - 1)^3} = 0$ **Sin solución**

x	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	+	-
	∪	∩

Cóncava: $(-\infty, 1)$ **Convexa:** $(1, \infty)$

Puntos de inflexión No hay punto de inflexión.

Representación gráfica

