5 Razones trigonométricas

1. Con ayuda de la calculadora científica, halla las siguientes razones trigonométricas expresándolas con cuatro decimales.

a) sen 32°　c) tg 17°　e) sec 153°　g) sen 23°15′　i) tg 133°43′　k) sec 121°32′33″

b) cos 43°　d) cosec 213°　f) cotg 320°　h) cos 47°32′　j) cosec 34°43′12″　l) cotg 2°2′2″

2. Con ayuda de la calculadora científica, halla las siguientes razones trigonométricas expresándolas con cuatro decimales. Los ángulos están dados en radianes.

a) sen 2　c) tg 4　e) sec 6　g) sen 2,5　i) tg 4,5　k) sec 3,25

b) cos 3　d) cosec 5　f) cotg 1,5　h) cos 3,5　j) cosec 5,5　l) cotg 4,75

3. Con la ayuda de la calculadora científica, halla los ángulos α positivos y menores de 360° y tales que:

a) sen $\alpha = 0{,}32$　c) tg $\alpha = 1{,}05$　e) sec $\alpha = 2$

b) cos $\alpha = -0{,}43$　d) cosec $\alpha = -1{,}1$　f) cotg $\alpha = -2$

4. Con la ayuda de la calculadora científica, halla los ángulos α positivos y menores de 2π radianes y tales que:

a) sen $\alpha = -0{,}42$　c) tg $\alpha = -1{,}25$　e) sec $\alpha = 1{,}35$

b) cos $\alpha = 0{,}4$　d) cosec $\alpha = 1{,}34$　f) cotg $\alpha = -1$

5. El ángulo α pertenece al primer cuadrante. Calcula las otras razones trigonométricas de α sabiendo que sen $\alpha = 0{,}53$.

6. El ángulo α pertenece al tercer cuadrante. Calcula las otras razones trigonométricas de α sabiendo que tg $\alpha = 1{,}25$.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2 + \text{tg } x = 1$　b) $2 \text{ sen}^2 x + 4 \cos^2 x = \frac{7}{2}$　c) $3 \text{ sen } x = \sqrt{3} \cos x$

8. Resuelve la ecuación trigonométrica $\text{sen } x + 2 \cos^2 x = 2$.

9. Expresa las siguientes razones trigonométricas mediante alguna razón de un ángulo del primer cuadrante:

a) sen 216°　b) cos 125°　c) tg 333°　d) cosec 130°　e) sec 225°　f) cotg 273°

10. Expresa las siguientes razones trigonométricas mediante alguna razón de un ángulo del primer cuadrante:

a) sen 1 330°　b) cos 2 450°　c) tg 3 125°　d) sec 1 440°

11. En los siguientes casos de triángulos rectángulos se proporcionan ciertos datos. Calcula el valor de las incógnitas indicadas:

a) Datos: $a = 12$ cm　$b = 13$ cm　$B = 90°$　Incógnitas: c y C

b) Datos: $b = 25$ cm　$C = 73°45'$　$B = 90°$　Incógnitas: a y c

12. La sombra de una torre, cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 42°, mide 12,5 metros. Calcula la altura de la torre.

13. Desde un punto situado a 10 m de una torre, una persona que mide 180 cm ve el extremo más alto bajo un ángulo de 43°. Calcula la altura de la torre.

SOLUCIONES

1. a) 0,5299 e) −1,1223 i) −1,0458
b) 0,7314 f) −1,1918 j) 1,7557
c) 0,3057 g) 0,3947 k) −1,9116
d) −1,8361 h) 0,6752 l) 28,1587

2. a) 0,9093 e) 1,0415 i) 4,6373
b) −0,98999 f) 0,0709 j) −1,4174
c) 1,1578 g) 0,5985 k) −1,0059
d) −1,0428 h) −0,9365 l) −0,0376

3.
a) $\text{sen}\,\alpha = 0{,}32 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 18{,}66... = 18°39'46'' \\ \alpha = 161{,}33... = 161°20' \end{cases}$

b) $\cos\alpha = -0{,}43 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 115{,}46... = 115°28'3'' \\ \alpha = 244{,}53... = 244°31' \end{cases}$

c) $\text{tg}\,\alpha = 1{,}05 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 46{,}39... = 46°23'49'' \\ \alpha = 226{,}39... = 226°23' \end{cases}$

d) $\text{cosec}\,\alpha = -1{,}1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 294{,}62... = 294°37'12'' \\ \alpha = 245{,}38... = 245°22'48'' \end{cases}$

e) $\sec\alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 60° \\ \alpha = 300° \end{cases}$

f) $\text{cotg}\,\alpha = -2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 333{,}43... = 333°26'6'' \\ \alpha = 153{,}43... = 153°26'6'' \end{cases}$

4.
a) $\alpha = 5{,}85$ rad o $\alpha = 3{,}58$ rad
b) $\alpha = 1{,}16$ rad o $\alpha = 5{,}12$ rad
c) $\alpha = 5{,}39$ rad o $\alpha = 2{,}25$ rad
d) $\alpha = 0{,}84$ rad o $\alpha = 2{,}3$ rad
e) $\alpha = 0{,}74$ rad o $\alpha = 5{,}55$ rad
f) $\alpha = 5{,}5$ rad o $\alpha = 2{,}36$ rad

5. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}2809} \approx 0{,}85$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \approx 0{,}62$ $\quad \text{cosec}\,\alpha \approx 1{,}89$

$\sec\alpha \approx 1{,}18$ $\quad \text{cotg}\,\alpha \approx 1{,}61$

6. $\sec\alpha = -\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1 + 1{,}562} \approx -1{,}6$

$\cos\alpha \approx -0{,}63$ $\quad \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha \approx -0{,}79$

$\text{cosec}\,\alpha \approx -1{,}27$ $\quad \text{cotg}\,\alpha = 0{,}8$

7.
a) $2 + \text{tg}\,x = 1 \Rightarrow \text{tg}\,x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 135° + 360°k \\ x = 315° + 360°k \end{cases} \quad k \in Z$

b) $2\,\text{sen}^2 x + 4\cos^2 x = \dfrac{7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\text{sen}^2 x + 4(1 - \text{sen}^2 x) = \dfrac{7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\,\text{sen}^2 x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30° + 360°k \\ \text{sen}\,x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 210° + 360°k \end{cases}$

$x = 150° + 360°k \qquad x = 330° + 360°k$

c) $3\,\text{sen}\,x = \sqrt{3}\cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \text{tg}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 360°k \\ x = 210° + 360°k \end{cases}$

8. $\text{sen}\,x + 2\cos^2 x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,x + 2 - 2\,\text{sen}^2 x = 2 \Rightarrow$

$\text{sen}\,x(1 - 2\,\text{sen}\,x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,x = 0 \Rightarrow x = 0° + 360°k \\ \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30° + 360°k \end{cases}$

$x = 150° + 360°k$

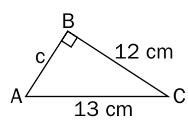
9. a) −sen 36° d) cosec 50°
b) −cos 55° e) −sec 45°
c) −tg 27° f) −cotg 87°

10.
a) $\text{sen}\,1\,330° = \text{sen}\,(250° + 3 \cdot 360°) =$
$= \text{sen}\,250° = -\text{sen}\,70°$

b) $\cos 2\,450° = \cos(290° + 6 \cdot 360°) =$
$= \cos 290° = \cos 70°$

c) $\text{tg}\,3\,125° = \text{tg}\,(245° + 8 \cdot 360°) = \text{tg}\,245° =$
$= \text{tg}\,65°$

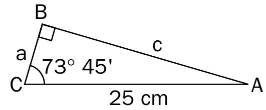
d) $\sec 1\,440° = \sec(0° + 4 \cdot 360°) = \sec 0°$

11.
a) 

$c = \sqrt{169 - 144} = 5$ cm

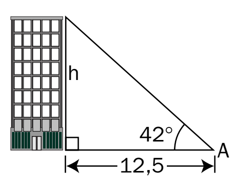
$\cos C = \dfrac{a}{b} = \dfrac{12}{13}$

$C = 22{,}61... \approx 22°37'11''$

b) 

$a = b \cdot \cos C \approx 7$ cm
$c = b \cdot \text{sen}\,C \approx 24$ cm

12. Se hace un dibujo con los datos del problema:

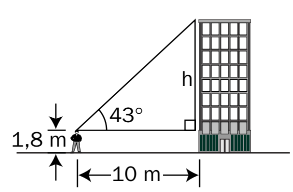


$\text{tg}\,42° = \dfrac{h}{12{,}5}$

$h = 12{,}5 \cdot \text{tg}\,42°$

$h \approx 11{,}26$ m

13. Se hace un dibujo con los datos del problema:



$\text{tg}\,43° = \dfrac{h - 1{,}8}{10}$

$h = 10 \cdot \text{tg}\,43° + 1{,}8$

$h \approx 11{,}13$ m

5 Razones trigonométricas

1. Calcula todos los ángulos x que verifiquen que $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, expresando los resultados en grados sexagesimales y en radianes.

2. Calcula todos los ángulos x que verifiquen que $\cos x = \frac{1}{2}$, expresando los resultados en grados sexagesimales y en radianes.

3. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(a + b) \cdot \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$$

4. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2 \operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x$$

5. Sea un ángulo tal que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$. Comprueba que $a \cos 2\alpha + b \operatorname{sen} 2\alpha = a$.

6. Escribe el valor de sen 3a y cos 3a en función de sen a y cos a.

7. Sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante y que $\operatorname{sen} \alpha = h$, calcula en función de h el valor de $\operatorname{cotg}(180° + \alpha)$.

8. Sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante y que $\operatorname{sen} \alpha = h$, calcula en función de h el valor de $\frac{\cos^4 \alpha - \operatorname{sen}^4 \alpha}{\cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}$.

9. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica, expresando los resultados en radianes:

$$\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cotg} x = 5$$

10. Simplifica todo lo que puedas la siguiente expresión trigonométrica: $\frac{\cos(2a - b) - \cos(2a + b)}{\operatorname{sen}(2a + b) + \operatorname{sen}(2a - b)}$

11. Considera la siguiente expresión trigonométrica: $\operatorname{sen} x + \frac{4}{3} \cos^2 x = \frac{3}{2}$

Estamos interesados en calcular todos los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que la verifican.

1. Simplifica todo lo que puedas la expresión. Para ello, un buen camino sería intentar conseguir otra equivalente a la anterior y en la que solo aparezca una de las razones trigonométricas.
2. Posiblemente hayas conseguido una expresión de segundo grado en la que la incógnita sea, tal vez, sen x. Puedes resolver, mediante el procedimiento habitual de las ecuaciones de segundo grado, y calcular, de esta forma, el valor o valores de sen x.

SOLUCIONES

1. Los ángulos del primer y segundo cuadrantes tienen el seno positivo:

$x = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad $\quad x = 120° = \frac{2\pi}{3}$ rad

Por tanto, todos los ángulos x son de la forma:

$x = 60° + 360°\ k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ rad

$x = 120° + 360°\ k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ rad

2. Los ángulos del primer y cuarto cuadrante tienen el coseno positivo:

$x = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad $\quad x = 300° = \frac{5\pi}{3}$ rad

Por tanto, todos los ángulos x son de la forma:

$x = 60° + 360°\ k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ rad

$x = 300° + 360°\ k = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$ rad

3. Desarrollando $\text{sen}(a + b) \cdot \text{sen}(a - b)$:

$$(\text{sen}\,a \cdot \cos b + \cos a \cdot \text{sen}\,b)(\text{sen}\,a \cdot \cos b - \cos a \cdot \text{sen}\,b) =$$
$$= \text{sen}^2 a \cos^2 b - \cos^2 a\ \text{sen}^2 b =$$
$$= \text{sen}^2 a \cos^2 b - (1 - \text{sen}^2 a)\ \text{sen}^2 b =$$
$$= \text{sen}^2 a \cos^2 b - \text{sen}^2 b + \text{sen}^2 a\ \text{sen}^2 b =$$
$$= \text{sen}^2 a(\cos^2 b + \text{sen}^2 b) - \text{sen}^2 b = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b$$

4. $$\frac{1 - \cos 2x}{2\ \text{senx}} - \frac{\text{sen}\ 2x}{1 + \cos 2x} =$$
$$= \frac{1 - \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{2\ \text{sen}\ x} - \frac{2\ \text{sen}\ x \cos x}{1 + \cos^2 x - \text{sen}^2 x} =$$
$$= \frac{2\ \text{sen}^2 x}{2\ \text{sen}\ x} - \frac{2\ \text{sen}\ x \cos x}{2 \cos^2 x} = \text{sen}\ x - \text{tg}\ x$$

5. $$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \text{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \text{sen}\ \alpha = \cos\alpha \cdot \text{tg}\ \alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\cos 2\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},\ \text{sen}\ 2\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cos 2\alpha + b\ \text{sen}\ 2\alpha = \frac{a^3 - ab^2 + 2ab^2}{a^2 + b^2} =$$
$$= \frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = a$$

6. $$\text{sen}\ 3a = \text{sen}(2a + a) =$$
$$= \text{sen}\ 2a \cos a + \cos 2a\ \text{sen}\ a =$$
$$= 2\ \text{sen}\ a \cos^2 a + \cos^2 a\ \text{sen}\ a - \text{sen}^3 a =$$
$$= 3\ \text{sen}\ a \cos^2 a - \text{sen}^3 a \cos 3a =$$

$$\cos 3a = \cos(2a + a) =$$
$$= \cos 2a \cos a - \text{sen}\ 2a\ \text{sen}\ a =$$
$$= \cos^3 a - \text{sen}^2 a \cos a - 2\ \text{sen}^2 a \cos a =$$
$$= \cos^3 a - 3\ \text{sen}^2 a \cos a$$

7. $$\text{cotg}(180° + \alpha) = \frac{\cos(180° + \alpha)}{\text{sen}(180° + \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\text{sen}\ \alpha} = \frac{\sqrt{1 - h^2}}{h}$$

8. $$\frac{\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha}{\cos 2\alpha - \text{sen}\ 2\alpha} =$$
$$= \frac{(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) \cdot (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha - 2\ \text{sen}\ \alpha \cos\alpha} =$$
$$= \frac{1 - h^2 - h^2}{1 - h^2 - h^2 - 2h\sqrt{1 - h^2}} =$$
$$= \frac{1 - 2h^2}{1 - 2h^2 - 2h\sqrt{1 - h^2}}$$

9. $$\text{tg}\ x + 4\ \text{cotg}\ x = 5 \Rightarrow \text{tg}\ x + \frac{4}{\text{tg}\ x} = 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{tg}^2 x + 4 = 5\ \text{tg}\ x \Rightarrow \text{tg}^2 x - 5\ \text{tg}\ x + 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{tg}\ x \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{tg}\ x = 4 \Rightarrow x \approx 1{,}32 + 2k\pi \\ \text{tg}\ x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k \in Z$$

10. $$\frac{\cos(2a - b) - \cos(2a + b)}{\text{sen}(2a + b) + \text{sen}(2a - b)} =$$
$$= \frac{\cos 2a \cos b + \text{sen}\ 2a\ \text{sen}\ b - \cos 2a \cos b + \text{sen}\ 2a\ \text{sen}\ b}{\text{sen}\ 2a \cos b + \cos 2a\ \text{sen}\ b + \text{sen}\ 2a \cos b - \cos 2a\ \text{sen}\ b} =$$
$$= \frac{2\ \text{sen}\ 2a\ \text{sen}\ b}{2\ \text{sen}\ 2a \cos b} = \text{tg}\ b$$

11. $$\text{sen}\ x + \frac{4}{3}\cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow 6\ \text{sen}\ x + 8 \cos^2 x = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6\ \text{sen}\ x + 8(1 - \text{sen}^2 x) = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8\ \text{sen}^2 x - 6\ \text{sen}\ x + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}\ x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{sen}\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 30° \\ x = 150° \end{array}\right. \\ \text{sen}\ x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 14{,}4775... = 14°\,28'\,39'' \\ x = 165{,}5224... = 165°\,31'\,21'' \end{array}\right. \end{array}\right.$$