7 Posiciones de rectas y planos

1. Estudia la posición relativa de los planos α y β en los siguientes casos:

a) α: $2x - y + z - 2 = 0$
β: $-6x + 3y - 3z - 2 = 0$

b) α: $x + y - 1 = 0$
β: $x + z - 2 = 0$

2. Estudia la posición relativa de las rectas r y s en los siguientes casos:

a) $r: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{4}$

$s: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -5 - t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

b) $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$

$s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$

c) $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{3}$

$s: \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 5 + 4t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$

3. Estudia la posición relativa de la recta r y del plano α en los siguientes casos:

a) $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$

α: $2x + y - z = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = -7 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

α: $3x + 2y - z + 1 = 0$

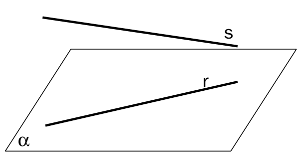
4. Estudia la posición relativa de los planos α, β y γ en los siguientes casos:

a) $\begin{cases} \alpha: x + y - z = 0 \\ \beta: 3x + 2y + 1 = 0 \\ \gamma: x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

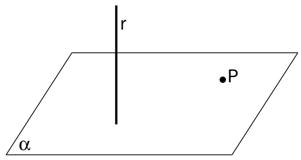
b) $\begin{cases} \alpha: 2x - y + 3z = 4 \\ \beta: x - 2y - z = -7 \\ \gamma: -2x + y - z = 2 \end{cases}$

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 0, -3)$ y es paralela a la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{2}$

6. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{3}$ y es paralelo a la recta $s: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{2}$



7. Determina la ecuación del plano perpendicular a la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{4}$ y que pasa por el punto $P(2, -1, 4)$.



8. Determina las ecuaciones de la recta perpendicular al plano α: $2x + y - 3z = 0$ y que pasa por el punto $P(-2, 1, 0)$.

9. Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(2, 0, -3)$ y $Q(3, 3, -1)$ y es paralelo a la recta de ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}$

10. Calcula el valor de k para que la recta de ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ esté contenida en el plano de ecuación general α: $2x + 3y - kz = 0$.

11. Dada la recta $r: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

a) Escribe la expresión algebraica del haz de planos cuya arista es la recta r.

b) Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto $P(-1, 2, 2)$.

SOLUCIONES

1. a) rango M = rango $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 1$

rango $M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 2$

Planos paralelos.

b) rango M = rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

rango $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

Planos secantes.

2. a) $A_r(0, 2, 5)$ $A_s(-3, -5, 6)$ $\vec{u}_r = (3, 2, 4)$
$\vec{u}_s = (1, -1, 3)$ $\overrightarrow{A_rA_s} = (-3, -7, 1)$
rango $(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y rango $(\overrightarrow{A_rA_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Las rectas se cortan.

b) $A_r(0, 0, 0)$ $A_s(1, 1, 0)$ $\vec{u}_r = (1, 2, 3)$
$\vec{u}_s = (3, 2, 1)$ $\overrightarrow{A_rA_s} = (1, 1, 0)$
rango $(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y rango $(\overrightarrow{A_rA_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

c) $A_r(0, 2, 0)$ $A_s(5, 5, 5)$ $\vec{u}_r = (2, 2, 3)$
$\vec{u}_s = (4, 4, 6)$ $\overrightarrow{A_rA_s} = (5, 3, 5)$
rango $(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 1$ y rango $(\overrightarrow{A_rA_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

3. a) Escribiendo la recta r en paramétricas y sustituyendo en el plano, se obtiene: $2t - t - t = 0$
$\Rightarrow 0 \cdot t = 0 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

b) $3(10 - 3t) + 2(-7 + 2t) + 1 - t + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -6 \cdot t = -18 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow$ La recta corta al plano en el punto $P(1, -1, 2)$.

4. a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango $M = 2$ y rango $M^* = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Los tres planos se cortan en una recta.

b) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ rango $M = 3$ y rango $M^* = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Se cortan en un punto.

5. La recta buscada tiene el mismo vector de dirección que r. Por tanto, su ecuación es:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{2}$$

6. El plano pedido pasa por el punto $P(0, 0, 1)$ y tiene como vectores directores a $\vec{u}_r = (-1, 1, 3)$ y a $\vec{u}_s = (1, 2, 2)$. Por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow 4x - 5y + 3z - 3 = 0$

7. El vector normal del plano es $\vec{n} = (1, -2, 4)$ y, por tanto, su ecuación es:

$x - 2y + 4z + D = 0 \Rightarrow 2 + 2 + 16 + D = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow D = -20 \Rightarrow x - 2y + 4z - 20 = 0$

8. El vector de dirección de la recta es el normal al plano, $\vec{n} = (2, 1, -3)$ y, por tanto, su ecuación es:

$$s: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}$$

9. $\alpha(P, \overrightarrow{PQ}, \vec{u})$ siendo $\vec{u} = (2, 1, 2)$ el vector de dirección de r.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow 4x + 2y - 5z - 23 = 0$

10. Para cualquier valor del parámetro t el punto de la recta $(1 + t, 1 + t, 1 + t)$ debe verificar la ecuación del plano.

$2(1 + t) + 3(1 + t) - k(1 + t) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (5 - k) \cdot t = k - 5$

Para $k = 5$ la recta está contenida en el plano.

11. a) $t \cdot (2x + y - z) + s \cdot (x + y + z - 1) = 0$

b) $-2t + 2s = 0 \Rightarrow t = s \Rightarrow$
$\Rightarrow (2x + y - z) + (x + y + z - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x + 2y - 1 = 0$

7 Posiciones de rectas y planos

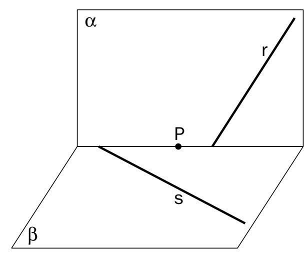
1. Estudia la posición relativa de los planos α, β y γ según los diferentes valores del parámetro a:

$$\begin{cases} \alpha: & (a-1)x + z = 0 \\ \beta: & ax + y + (a-1)z = a \\ \gamma: & x + y = 1 \end{cases}$$

2. Estudia la posición relativa de la recta r y del plano α según los diferentes valores del parámetro a:

$$r: \begin{cases} ax + 3y = 1 \\ x - 2y - az = -1 \end{cases} \qquad \alpha: \quad 3x - ay - 2z = -1$$

3. Dadas las rectas $r: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = -3 + 4t \\ z = t \end{cases}$:



a) Demuestra que r y s se cruzan.

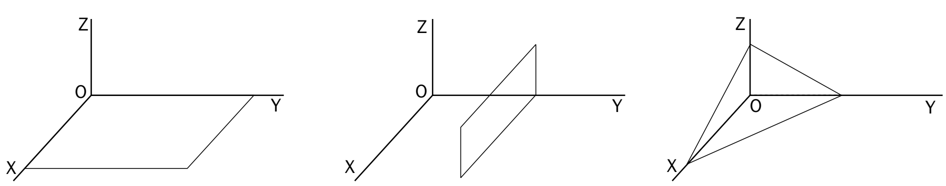
b) Halla la ecuación del plano α que contiene a r y a $P(0, 0, 0)$.

c) Determina la ecuación del plano β que contiene a s y a $P(0, 0, 0)$.

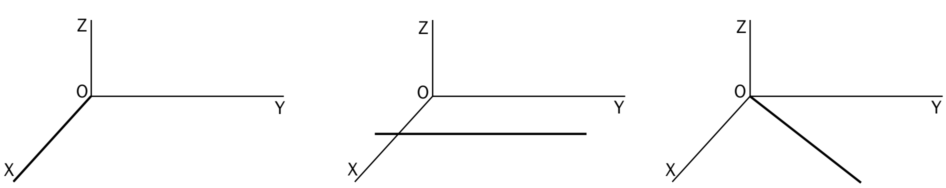
d) Halla la ecuación de la recta que pasa por P y se apoya en r y en s.

4. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{2x}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{3}$ y es paralelo a la recta $s: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{3-y}{2} = \dfrac{1-2z}{2}$

5. Escribe las ecuaciones de cada uno de los siguientes planos e indica su posición relativa con respecto al sistema de referencia:



6. Escribe las ecuaciones de cada una de las siguientes rectas e indica su posición relativa con respecto al sistema de referencia:



7. a) Escribe todos los planos que pasan por los puntos $A(-1, 2, 1)$ y $B(0, -1, 3)$.

b) De todos los planos hallados en el apartado a, calcula cuál de ellos pasa por el punto $P(5, -6, 5)$.

c) De todos los planos hallados en el apartado a, calcula el que es paralelo a la recta $r: \begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 3x + z = -3 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. $M = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M^* = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|M| = (a-2)(1-a) = 0 \iff a = 2$ o $a = 1$

- $a \neq 2$ y $a \neq 1 \Rightarrow$ rango $(M) = 3$, rango $(M^*) = 3$

  Los tres planos se cortan en un punto.
- $a = 1 \Rightarrow$ rango $(M) = 2$, rango $(M^*) = 2$

  Dos planos coincidentes y otro que los corta.
- $a = 2 \Rightarrow$ rango $(M) = 2$, rango $(M^*) = 3$

  Planos en posición de superficie prismática.

2. $M = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -a \\ 3 & -a & -2 \end{pmatrix}$

$M^* = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -a & -1 \\ 3 & -a & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$|M| = (1-a)(a^2 + a + 6) = 0 \iff a = 1$

- $a \neq 1 \Rightarrow$ rango $(M) =$ rango $(M^*) = 3 \Rightarrow$ La recta corta al plano.
- $a = 1 \Rightarrow$ rango $(M) =$ rango $(M^*) = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

3. a) $\vec{u}_r = (-1, 3, -1)$, $\vec{u}_s = (5, 4, 1)$, $A_r(0, -1, 1)$ $A_s(4, -3, 0)$, $\overrightarrow{A_rA_s} = (4, -2, -1)$

Como rango $(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y rango $(\overrightarrow{A_rA_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Las rectas r y s se cruzan.

b) $\alpha(P, \overrightarrow{PA_r}, \vec{u}_r) \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha$: $2x + y + z = 0$

c) $\beta(P, \overrightarrow{PA_s}, \vec{u}_s) \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta$: $3x + 4y - 31z = 0$

d) t: $\begin{cases} \alpha: 2x + y + z = 0 \\ \beta: 3x + 4y - 31z = 0 \end{cases}$

4. r: $\dfrac{x}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{3}$

s: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha[A(0, 2, 0), \vec{u}(-1, 2, 6), \vec{v}(1, -2, -1)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha$: $2x + y - 2 = 0$

5. El primer plano es el plano coordenado XOY. Su ecuación es $z = 0$.

El segundo plano es paralelo al plano coordenado XOZ. Su ecuación es $y = a$.

El tercer plano corta a los ejes según los segmentos de longitud a, b y c.

Su ecuación es: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

6. La primera recta es el eje OX.

Sus ecuaciones son: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

La segunda recta es paralela al eje OY.

Sus ecuaciones son: $\begin{cases} x = a \\ z = 0 \end{cases}$

La tercera recta está contenida en el plano coordenado XOY y pasa por el origen de coordenadas.

Sus ecuaciones son: $\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = 0 \end{cases}$

7. a) La recta que pasa por A y B tiene por ecuaciones:

$\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

El haz de planos cuya arista es la recta AB es:
$t \cdot (3x + y + 1) + s \cdot (2y + 3z - 7) = 0$

b) $t \cdot (15 - 6 + 1) + s \cdot (-12 + 15 - 7) = 9$

$\Rightarrow s = \dfrac{5}{2}t \Rightarrow 3x + y + 1 + \dfrac{5}{2}(2y + 3z - 7) = 0$

$\Rightarrow 2x + 4y + 5z - 11 = 0$.

c) $(0, 0, -3)$ y $(-3, 5, 6)$ son puntos de r. Por tanto, $\vec{u}_r = (3, -5, -9)$ es un vector director de r. Se debe cumplir que el vector normal del plano y el de dirección de r sean perpendiculares:

$(3t, t + 2s, 3s) \cdot (3, -5, -9) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{37}{4}s \Rightarrow \dfrac{37}{4}s \cdot (3x + y + 1) +$
$+ s \cdot (2y + 3z - 7) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 37x + 15y + 4z + 3 = 0$