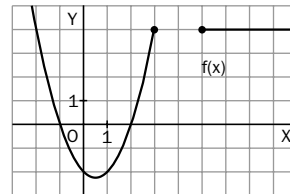


# 6 Funciones

1. Se considera la función que asigna a cada número real el doble de su cuadrado aumentado en 3 unidades.
- Escribe su expresión algebraica.
  - ¿Cuál es la imagen de 2?
  - ¿Qué número o números tienen como imagen 5?
  - ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Cuál es su recorrido?
  - ¿En qué puntos corta la función al eje OX?
  - ¿En qué punto corta la función al eje OY?

2. A la vista de la gráfica de la función  $f$ , establece:
- $f(3)$  y  $f(9)$ .
  - El dominio de  $f$ .
  - Los puntos donde  $f$  corta los ejes coordenados.



3. Representa la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

4. Dadas las funciones  $f(x) = 2x^2 + 5$  y  $g(x) = \frac{1}{x} - 3$ , calcula:

- $f(3) + g(3)$
- $\frac{f(5)}{g(5)}$
- $f(x) - g(x)$

5. Halla el dominio de las siguientes funciones:

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$

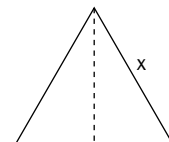
6. Considera las funciones  $f(x) = \sqrt{x-1}$  y  $g(x) = x^2$ .

- Calcula  $f(g(x))$
- Calcula  $g(f(x))$
- ¿Es  $f(g(x)) = g(f(x))$ ?

7. Halla la función recíproca de  $f(x) = \sqrt{x+1}$ .

8. Considera un triángulo equilátero de lado  $x$ .

- Expresa su altura en función del valor del lado (puedes usar el teorema de Pitágoras, pero recuerda que solo es válido para triángulos rectángulos).
- Halla el valor de la altura cuando el lado mide 6 cm.



9. Una empresa de alquiler de coches tiene la siguiente tarifa: 30 euros por la formalización del alquiler del vehículo y 0,09 euros por kilómetro recorrido.

- Calcula la expresión algebraica de la función que indica el dinero a pagar según los kilómetros recorridos.
- ¿Cuánto tendrá que pagar una persona que recorrió 120 kilómetros con un coche alquilado?
- Dibuja la gráfica de la función.

# SOLUCIONES

1. a)  $f(x) = 2x^2 + 3$ .

b)  $f(2) = 11$

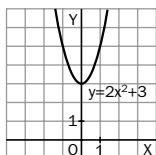
c)  $f(x) = 2x^2 + 3 = 5 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$

d)  $D(f) = \mathbb{R}$

A partir de la gráfica de la función se observa que para cualquier valor de  $x$  el correspondiente valor de  $y$  es siempre mayor o igual que 3; por tanto,  $f(D) = [3, +\infty)$ .

e) Como  $2x^2 + 3 = 0$  no tiene solución real, la función no corta el eje OX.

f)  $y = f(0) = 3 \Rightarrow f$  corta el eje OY en el punto  $(0, 3)$ .



5. a) La expresión de  $f$  tiene sentido si  $x - 4 > 0$   
 $\Leftrightarrow x > 4$ ; por lo tanto,  $D(f) = (4, +\infty)$ .

b) La expresión de  $f$  tiene sentido si  $x + 1 \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x \geq -1$ ; por lo tanto,  $D(f) = [-1, +\infty)$ .

6. a)  $f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2 - 1}$

b)  $g(f(x)) = g(\sqrt{x - 1}) = (\sqrt{x - 1})^2 = x - 1$

c) A partir de los apartados anteriores se concluye que no.

7. Intercambiando variables:

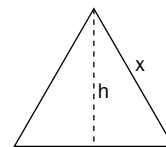
$$x = \sqrt{y + 1} \Rightarrow x^2 = y + 1 \Rightarrow y = x^2 - 1$$

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$  es la función recíproca.

8. a) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$



b)  $h = \frac{\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 3\sqrt{3}$  cm

2. La función dibujada es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x \leq 3 \\ 4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

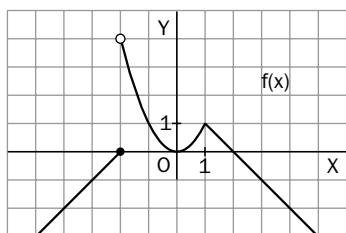
aunque no es necesario que los alumnos conozcan su expresión algebraica.

a)  $f(3) = 4$ ;  $f(9) = 4$

b)  $D(f) = (-\infty, 3]$  y  $[5, +\infty)$

c)  $f$  corta el eje OX en los puntos  $(-1, 0)$  y  $(2, 0)$ ;  $f$  corta el eje OY en  $(0, -2)$ .

3.



4. a)  $f(3) + g(3) = 18 + 5 + \frac{1}{3} - 3 = \frac{61}{3}$

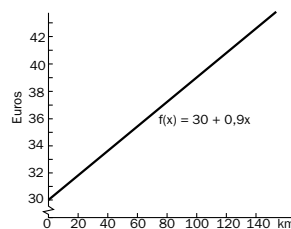
b)  $\frac{f(5)}{g(5)} = \frac{50 + 5}{\frac{1}{5} - 3} = \frac{275}{-14} = -\frac{275}{14}$

c)  $f(x) - g(x) = 2x^2 + 5 - \left(\frac{1}{x} - 3\right) =$   
 $= 2x^2 + 8 - \frac{1}{x} = \frac{2x^3 + 8x - 1}{x}$

9. a)  $f(x) = 30 + 0,09x$ , donde  $x$  representa los kilómetros recorridos.

b)  $f(120) = 40,8$  euros.

c)



# 6 Funciones

1. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{1}{|x^2 - 1|}$

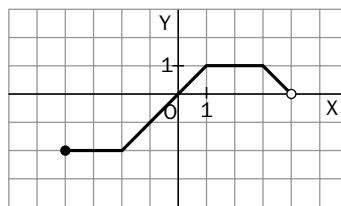
b)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$

2. Considera la función  $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ .

a) Calcula su función recíproca.

b) ¿Coincide el dominio de  $f$  con el de su recíproca?

3. Escribe la expresión algebraica de la función definida a trozos, representada por la siguiente gráfica:



4. Dadas las funciones  $f(x) = \sqrt{x-1}$  y  $g(x) = x^2$ , resuelve la ecuación  $f(g(x)) = g(f(x))$ .

5. Un grupo de alumnos que prepara su viaje de fin de curso encarga a una empresa la fabricación de camisetas con el logotipo de su centro. Esta les cobra 18 euros por el diseño y 1,20 euros por unidad fabricada.

a) ¿Cuánto les costaría encargar 225 camisetas?

b) Escribe la función que da el precio total a pagar según el número de camisetas pedidas.

c) Si los alumnos disponen de 540 euros, ¿cuál es el número máximo de camisetas que pueden encargar?

d) Los alumnos han encargado 300 camisetas para venderlas a 3 euros. Solo han conseguido vender 242 unidades. ¿Cuánto dinero han ganado o perdido en la operación?

6. Con una cuerda de 36 centímetros se quiere construir un rectángulo, sin que sobre ni falte cuerda.

a) ¿Qué área tendrá el rectángulo si la base mide 10 centímetros?

b) Escribe la función que da el área del rectángulo según la medida de la base del mismo.

c) ¿Cuál es el dominio de la función anterior?

d) Representala gráficamente.

7. Una empresa A de alquiler de coches cobra 30 euros por el contrato y 0,09 euros por kilómetro recorrido. Otra empresa B no cobra por formalizar el contrato pero su precio es de 0,15 euros por kilómetro recorrido.

a) Si una persona desea alquilar un coche para recorrer 150 kilómetros, ¿qué empresa le resulta más rentable?

b) Escribe las expresiones que representan las tarifas de las empresas A y B en función de los kilómetros recorridos.

c) ¿A partir de qué número de kilómetros es más rentable alquilar el coche en la empresa A?

8. Un vendedor comercial tiene un sueldo fijo de 600 euros al mes más una comisión del 15 % sobre las ventas que realice.

a) ¿Qué sueldo cobró un mes que vendió productos por importe de 4 808 euros?

b) Indica cuál es su sueldo en función de sus ventas mensuales.

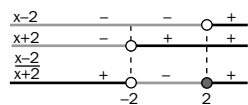
c) ¿Cuál fue el importe de las ventas un mes en el que cobró 1 502,53 euros?

9. Expresa el área de un triángulo isósceles, cuyo lado desigual mide 8 cm, en función de la medida de los otros dos lados.

# SOLUCIONES

1. a)  $|x^2 - 1| \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$   
 $D(1) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

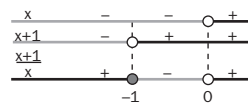
b)  $\frac{x-2}{x+2} \geq 0$   
 $D(f) = \mathbb{R} - [-2, 2]$



2. a) Intercambiando variables,  $x = \sqrt{1 + \frac{1}{y}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

b)  $1 + \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \geq 0$   
 $D(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$



$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$   
 $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Solución:  $D(f) \neq D(f^{-1})$

3.  $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4 - x & \text{si } 3 < x < 4 \end{cases}$

4.  $f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 = x - 1$

$\sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Rightarrow x^2 - 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow x = 1$

5. a)  $18 + 1,2 \cdot 225 = 288$  euros.

b)  $f(x) = 18 + 1,2x$  euros, siendo  $x$  el número de camisetas pedidas.

c)  $f(x) \leq 540 \Leftrightarrow 18 + 1,2x \leq 540 \Rightarrow x \leq 435$   
 Pueden encargar como máximo 435 camisetas.

d) Han invertido  $f(300) = 378$  euros, y con las ventas han obtenido  $3 \cdot 242$  euros = 726 euros; por tanto, han ganado 348 euros.

6. a) La altura debe medir 8 cm; por tanto, el área será  $A = 10 \times 8 \text{ cm}^2 = 80 \text{ cm}^2$ .

b) Sea  $x$  la medida de la base en cm. La altura es:

$\frac{36 - 2x}{2} \text{ cm} = 18 - x \text{ cm}$

$A(x) = x(18 - x) \text{ cm}^2 = 18x - x^2 \text{ cm}^2$

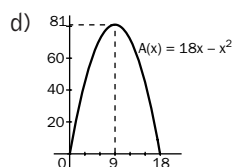
c) No se considera cero como posible valor del área, pues no sería un rectángulo propiamente dicho. Así pues:

$A(x) > 0$  y  $x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18x - x^2 = x(18 - x) > 0, x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18 - x > 0, x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 18$

Solución:  $D(A) = (0, 18)$



7. a) En la empresa A le costaría:  $30 + 0,09 \cdot 150 = 43,5$  euros y en la empresa B:  $0,15 \cdot 150 = 22,5$  euros; por tanto, es más rentable la empresa B.

b) Siendo  $x$  el número de kilómetros recorridos,  $A(x) = 30 + 0,09x$  y  $B(x) = 0,15x$ .

c) Se trata de saber para qué valores de  $x$ ,  $A(x) < B(x)$ .

$30 + 0,09x < 0,15x \Rightarrow x > 500$

Solución: Superados los 500 km resulta más rentable la empresa A.

8. a) Ese mes cobró los 600 euros fijos más la comisión correspondiente a los 4 808 euros:

$600 + \frac{15 \cdot 4808}{100}$  euros = 1 321,2 euros

b)  $f(x) = 600 + \frac{15x}{100}$ , siendo  $x$  el importe de las ventas mensuales.

c)  $f(x) = 1502,53 = 600 + \frac{15x}{100} \Rightarrow x = 6016,87$

El importe de las ventas fue de 6 016,87 euros.

9. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$h^2 = x^2 - 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{x^2 - 16}$

Por tanto:

$A(x) = \frac{8\sqrt{x^2 - 16}}{2} \text{ cm}^2 = 4\sqrt{x^2 - 16} \text{ cm}^2$

