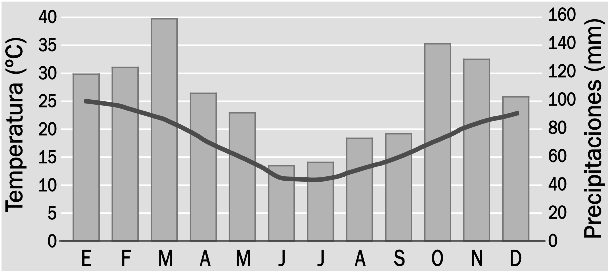
8 Funciones. Propiedades globales

ACTIVIDADES INICIALES

8.I. Este es el climograma correspondiente a la ciudad de Buenos Aires para el año 2009.



¿En qué mes se alcanzan las temperaturas máximas? ¿Y las mínimas? ¿Cuáles son los meses de verano en Argentina?

Las temperaturas máximas se alcanzan en diciembre y enero, y las mínimas, en junio y julio. Las temperaturas varían al revés que en España, de forma que los meses de verano argentinos se corresponden con los de invierno españoles.

8.II. ¿Coinciden los meses más lluviosos con los de tu ciudad?

Respuesta variable, dependiendo de la ciudad.

8.III. ¿Qué tipo de ropa llevará un turista que visite Buenos Aires en enero?

El turista llevará en enero ropa de verano.

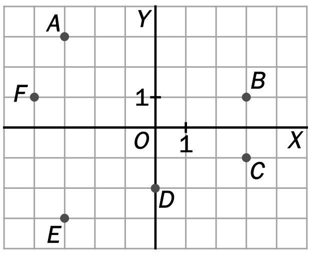
8.IV. Es posible que no tengas a mano los datos de las precipitaciones en tu ciudad. Representa en una gráfica sólo las temperaturas medias en cada mes, utilizando datos aproximados. Compara tu gráfico con el de tus compañeros.

Actividad con los compañeros. La gráfica variará según la ciudad.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

8.1. Actividad resuelta.

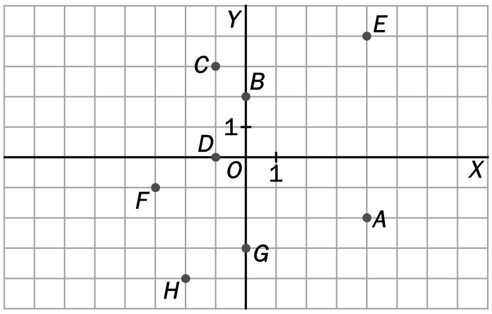
8.2. Escribe las coordenadas de los puntos que aparecen en la figura.



A(–3, 3) *B*(3, 1) *C*(3, –1) *D*(–3, –3)

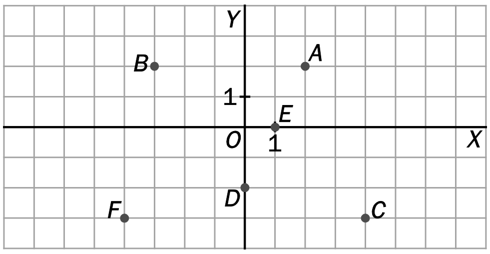
8.3. (TIC) Representa estos puntos en unos ejes de coordenadas.

***A*(4, –2)**	***C*(–1, 3)**	***E*(4, 4)**	***G*(0, –3)**
***B*(0, 2)**	***D*(–1, 0)**	***F*(–3, –1)**	***H*(–2, –4)**



8.4. (TIC) Representa estos puntos en unos ejes de coordenadas indicando su cuadrante.

***A*(2, 2)**	***C*(4, –3)**	***E*(1, 0)**
***B*(–3, 2)**	***D*(0, –2)**	***F*(–4, –3).**



Primer cuadrante: *A*(2, 2)

Segundo cuadrante: *B*(–3, 2)

Tercer cuadrante: *F*(–4, –3)

Cuarto cuadrante: *C*(4, –3)

El punto *D*(0, –2) está sobre el eje de ordenadas.

El punto *E*(1, 0) está sobre el eje de abscisas.

8.5. ¿Verdadero o falso?

a) *A*(–3, –1) pertenece al 3.^{er} cuadrante.

b) *B*(2, 0) está sobre el eje de ordenadas.

c) En el punto *C*(4, –2), el 4 es la abscisa.

d) Los puntos *D*(–1, 1) y *E*(–4, –2) están en el 2.º cuadrante.

a) Verdadero.

b) Falso, está sobre el de abscisas.

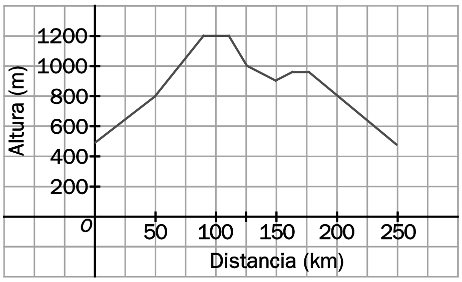
c) Verdadero.

d) Falso. *D* está en el 2.º cuadrante, y *E*, en el 3.º

8.6. Actividad interactiva.

8.7. Actividad resuelta.

8.8. La gráfica representa una etapa ciclista. A cada distancia al punto de salida le corresponde una determinada altitud.



a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) ¿Cuándo se alcanza la mayor altitud?

c) ¿Cuántos kilómetros se recorren en la etapa?

a) La variable independiente es la distancia al punto de salida.

b) La mayor altitud se alcanza entre los 88 y 112 km de distancia al punto de salida.

c) Se recorren 250 km en la etapa.

8.9. Escribe la fórmula del perímetro de un triángulo equilátero en función de sus lados.

El perímetro *P* se obtiene multiplicando por 3 la longitud *x* del lado; por tanto: $P = 3x$.

8.10. En la tabla se representa la temperatura de una persona a lo largo de un día.

Hora	0	4	8	12	16	20	24
Temperatura (ºC)	38	36	36,5	36	38	39	38

a) ¿Cuál es la variable dependiente?

b) ¿Cuándo varió más la temperatura?

a) La variable dependiente es la temperatura (ºC).

b) La máxima variación se produjo entre las 0 y las 4 horas, y entre las 12 y las 16 horas.

8.11. En la tabla tienes el tiempo que se tarda en hacer un trabajo según los alumnos que participen.

Tiempo (horas)	6	3	2	1,5	1,2	1
N.º de alumnos	1	2	3	4	5	6

Si solo se dispone de media hora para preparar el trabajo, ¿cuántos alumnos deberían participar?

La relación entre las variables es inversamente proporcional. Por tanto, si para hacer el trabajo en 1 hora participan 6 alumnos, para la mitad de tiempo, media hora, participará el doble de alumnos, 12.

8.12. Actividad interactiva.

8.13. Actividad resuelta.

8.14. Actividad resuelta.

8.15. Di si las siguientes relaciones son funciones.

a) El espacio entre dos ciudades y el tiempo que tarda un tren en ir de una a otra.

b) La duración de un partido de fútbol y los goles que se marcan.

c) La edad de un árbol y el número de anillos de su tronco.

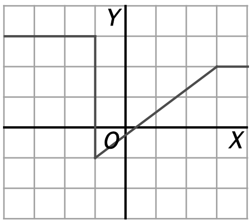
a) Sí es una función porque para cada valor de la distancia entre las dos ciudades hay un único valor del tiempo que tarda el tren en ir de una a otra.

b) No, porque para un valor de la duración de los partidos de fútbol, el número de goles no es único.

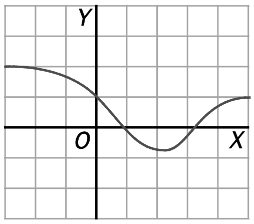
c) Sí, porque para cada valor de la edad hay un único valor del número de anillos del tronco.

8.16. Indica razonadamente si las siguientes gráficas representan funciones.

a)



b)



a) No es una función porque para $x = -1$, la variable y toma infinitos valores.

b) Sí es una función porque para cada valor de x hay un único valor de y.

8.17. Una función asigna a cada número entero el resultado de multiplicarlo por 4 y restarle 1.

a) Escribe la fórmula general de dicha función.

b) Calcula la imagen de 7.

c) ¿Para qué número entero se obtiene una imagen de 11?

a) $f(x) = 4 \cdot x - 1$

b) $f(7) = 4 \cdot 7 - 1 = 28 - 1 = 27$

c) $4x - 1 = 11 \Rightarrow x = 3$

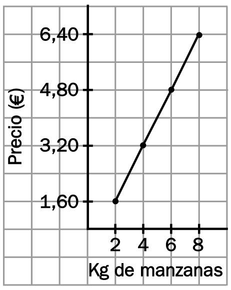
8.30. (TIC)

a) Representa gráficamente la función que viene dada por la siguiente tabla

kg de manzanas	2	4	6	8
Precio en euros	1,60	3,20	4,80	6,40

b) ¿Tiene sentido unir los puntos?

a)



b) Sí tiene sentido unir los puntos, ya que se pueden adquirir cantidades de manzanas que no sean kilos enteros; por ejemplo, 3,57 kg.

8.31. (TIC) Un grupo de alumnos va a alquilar un autobús para ir de excursión por 400 euros. El precio que debe pagar cada alumno depende de cuántos vayan a la excursión, según la siguiente tabla.

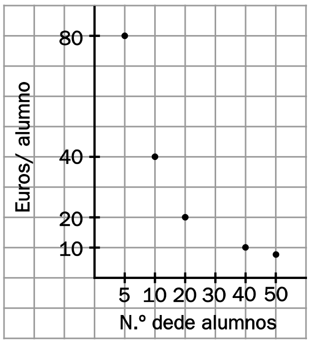
N.º de alumnos	5	10	20	40	50
Euros/alumno	80	40	20	10	8

a) Representa la función correspondiente.

b) ¿Tiene sentido unir los puntos?

a)

.



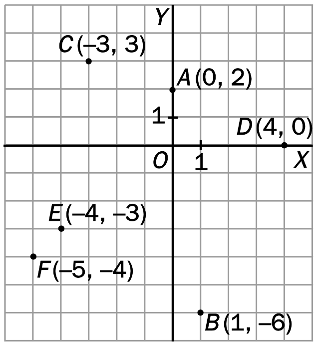
b) No tiene sentido unir los puntos, puesto que el número de alumnos ha de ser entero. No tiene sentido hablar de 1,5 alumnos, por ejemplo.

EJERCICIOS

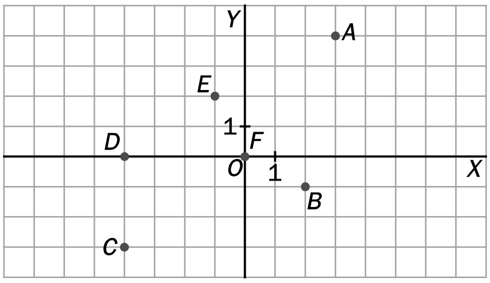
Coordenadas cartesianas

8.42. (TIC) Representa los puntos de coordenadas.

***A*(0, 2)** **_B_(1, –6)** **_C_(–3, 3)** **_D_(4, 0)** **_E_(–4, –3)** **_F_(–5, –4)**

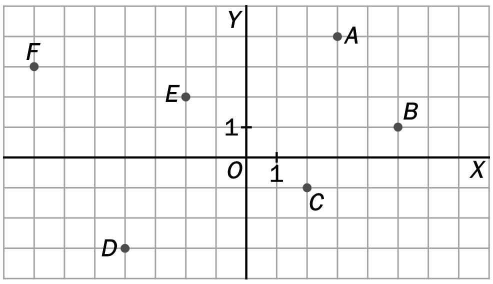


8.43. Escribe las coordenadas de los puntos representados en la siguiente figura.



A(3, 4)	*C*(–4, –3)	*E*(–1, 2)
B(2, –1)	*D*(–4, 0)	*F*(0, 0)

8.44. Escribe las coordenadas de los puntos de la figura e indica en qué cuadrante se encuentran.



A(3, 4). En el primer cuadrante

B(5, 1). En el primer cuadrante

C(2, –1). En el cuarto cuadrante

D(–4, –3). En el tercer cuadrante

E(–2, 2). En el segundo cuadrante

F(–7, 3). En el segundo cuadrante

8.45. Indica el cuadrante de cada punto.

a) ***A*(–2, –5)**

b) ***B*(1, 2)**

c) ***C*(5, 0)**

d) ***D*(–6, 8)**

a) Tercer cuadrante

b) Primer cuadrante

c) Sobre el eje *X*

d) Segundo cuadrante

8.46. Dado el punto *A*(–3, 6), escribe las coordenadas de un punto *B* que tenga como abscisa el doble que *A* y esté sobre el eje de abscisas.

La abscisa es $x = 2 \cdot (-3) = -6$.

La ordenada ha de ser 0 para que esté sobre el eje *X*.

El punto es *B*(–6, 0).

Fórmulas, tablas y gráficas

8.47. La siguiente gráfica muestra cómo varía la longitud de la sombra de un árbol a distintas horas del día.

a) **¿A qué hora la sombra fue menor?**

b) **¿Cuánto medía la sombra a las 19.30?**

c) **¿A qué horas la sombra mide lo mismo?**

a) Entre las 14 y las 15 horas

b) 200 cm

c) Entre las 14 y las 15 horas

8.48. Escribe la fórmula asociada a la tabla.

x	–2	–1	0	1	2	6
y	–6	–3	0	3	6	18

La función asocia a cada número su triple; por tanto, la fórmula es: $f(x) = 3x$.

8.49. La siguiente tabla recoge dimensiones de rectángulos de 28 metros de perímetro.

Base (m)	**2**	**2,5**		**7**	**9**		**10**
Altura (m)			**9**		**5**	**4,5**	

a) Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

b) ¿Algún rectángulo es un cuadrado?

a) Utilizando la fórmula del perímetro de un rectángulo, $28 = 2 \cdot B + 2 \cdot A$, se obtiene:

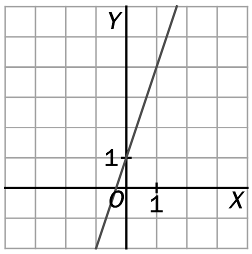
Base (m)	2	2,5	5	7	9	9,5	10
Altura (m)	12	11,5	9	7	5	4,5	4

b) El rectángulo que tiene 7 m de base y 7 m de altura es un cuadrado.

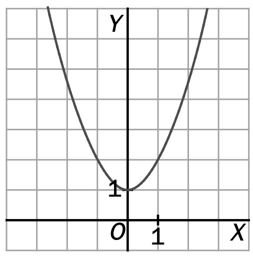
Concepto de función. Representación gráfica

8.50. Indica cuáles de las siguientes gráficas representan una función y cuáles no.

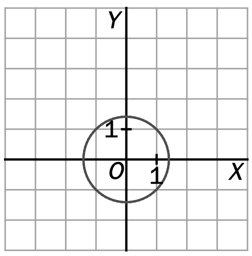
a)



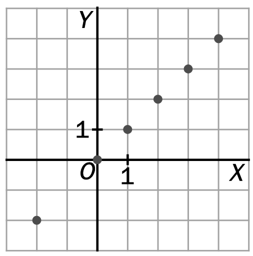
c)



b)



d)



a) Es función.

b) No es función.

c) Es función.

d) Es función.

8.51. (TIC) Calcula las imágenes de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = 5x + 4$ $\quad x = 2$

b) $f(x) = 3x(x - 5)$ $\quad x = 5$

c) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2}$ $\quad x = -3$

d) $f(x) = -x^2$ $\quad x = -1$

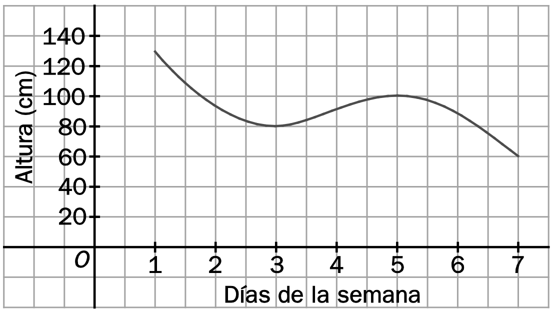
a) $f(2) = 14$

b) $f(5) = 0$

c) $f(-3) = 0$

d) $f(-1) = -1$

8.66. La siguiente gráfica muestra la altura del agua en un depósito a lo largo de una semana.



a) ¿Qué día alcanzó la máxima altura? ¿Cuál fue?

b) ¿Cuándo alcanzó la mínima altura? ¿Cuál fue?

c) ¿Entre qué días creció el nivel? ¿En cuáles decreció?

d) Si el estudio hubiera durado más días, y la función alcanzase el eje *X* en el punto (9, 0), ¿qué significado tendría el punto de corte?

a) La máxima altura se alcanzó el primer día. Fue de 130 cm.

b) La mínima altura se alcanzó el séptimo día. El nivel del agua fue de 60 cm.

c) El nivel creció entre el 3.º y el 5.º día, y decreció del 1.º al 3.º y del 5.º al 7.º día.

d) Significaría que el noveno día se habría acabado completamente el agua del depósito.

8.67. (TIC) Un ciclista recorre 280 kilómetros a velocidad constante de 40 kilómetros por hora.

a) Haz una tabla que exprese la duración del viaje.

b) Escribe la función asociada a la tabla.

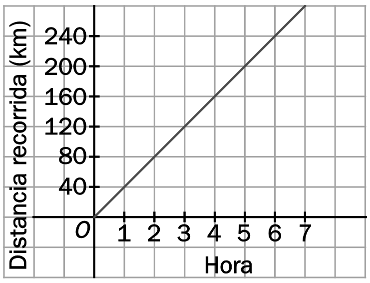
c) Representa gráficamente la función.

a)

Hora	0	2	4	6	7
Distancia recorrida (km)	0	80	160	240	280

b) Cada hora, el ciclista recorre 40 km. Por tanto, en x horas recorre $40x$ kilómetros. La fórmula que indica la distancia recorrida en función del tiempo (en horas) transcurrido es $f(x) = 40 \cdot x$.

c) Puesto que el ciclista tarda 280 : 40 = 7 horas en realizar el recorrido completo, la gráfica no debe tener valores de x mayores de 7.



8.68. Para pasar de centímetros a pulgadas se multiplica por 2 y se divide entre 5.

Si *x* representa el número de centímetros e *y* el de pulgadas:

a) Escribe *y* en función de *x*

b) Forma una tabla de valores

c) Representa gráficamente los valores de la tabla.

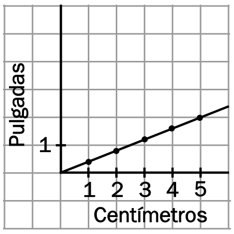
d) ¿Se pueden unir los puntos?

a) $y = \dfrac{2x}{5}$

b)

Cm	1	2	3	4	5
Pulgadas	0,4	0,8	1,2	1,6	2c)

c)



d) Tiene sentido unir los puntos, ya que los valores seleccionados para formar la tabla son aleatorios, no necesariamente se han de transformar centímetros enteros.

8.69. (TIC) Dos compañías de teléfonos ofertan las siguientes condiciones en sus llamadas locales.

	Establecimiento de llamada	Precio por minuto
COMPAÑÍA *A*	**0,02 €**	**0,03 €**
COMPAÑÍA *B*	**0,03 €**	**0,02 €**

a) Escribe la función que relaciona el coste de una llamada con su duración en *A* y en *B*.

b) ¿Cuál es la variable independiente?

c) Represéntalas en los mismos ejes.

d) ¿A partir de qué momento resulta más rentable la compañía *B*?

a) Compañía *A*: $f(x) = 0{,}02 + 0{,}03 \cdot x$ Compañía *B*: $g(x) = 0{,}03 + 0{,}02 \cdot x$

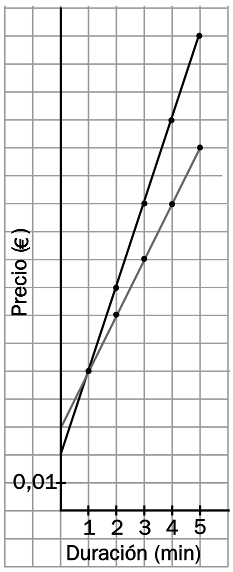
b) La variable independiente es el tiempo de duración de la llamada.

c) Compañía *A*

Duración (min)	1	2	3	4	5
Precio (€)	0,05	0,08	0,11	0,14	0,17

Compañía *B*

Duración (min)	1	2	3	4	5
Precio (€)	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13



d) Transcurrido el primer minuto resulta más rentable la compañía *B*: la gráfica de *B* está por debajo de la gráfica de *A* a partir de $x = 1$.

8.70. (TIC) En una tienda de deportes se ofertan todos sus artículos con un 30 % de descuento.

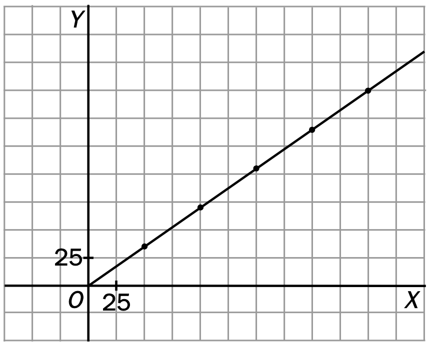
a) Encuentra una fórmula que exprese el precio de cada uno de ellos después de hacer el descuento.

b) Representa la función gráficamente teniendo en cuenta que el artículo más caro antes de la oferta costaba 250 euros.

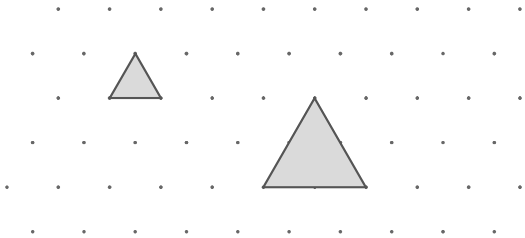
a) Como los artículos tienen un 30 % de descuento, el precio final es el 70 % del precio inicial. La función que transforma el precio inicial en el final es $f(x) = 0{,}70 \cdot x$.

b)

x	50	100	150	200	250
$f(x)$	35	70	105	140	175



8.71. Sobre un geoplano triangular como el representado en la figura se construyen triángulos de lado 1 unidad, 2 unidades, 3 unidades, etc.



a) Calcula el número de puntos por los que pasa el contorno de cada triángulo.

b) Copia y completa la siguiente tabla.

Unidades lineales de lado	**1**	**2**	**3**	**4**
N.º de puntos por los que pasa el contorno	**3**	**6**		

c) Encuentra la función que expresa el número de puntos por los que pasa el contorno de cada triángulo, en función de las unidades de lado.

a) El triangulo de lado 1 pasa por 3 puntos. El triángulo de lado 2 pasa por 6 puntos.

b)

Unidades lineales de lado	1	2	3	4
N.º de puntos por los que pasa	3	6	10	15

c) $y = \dfrac{(x+1)\cdot(x+2)}{2}$

8.72. (TIC) Un traductor trabaja desde las 9.00 hasta las 11.30. Durante la primera hora traduce a un ritmo de 20 palabras por minuto. Después descansa media hora y luego continúa trabajando a 15 palabras por minuto.

a) Construye una tabla de valores que exprese el número de palabras que lleva traducidas cada 15 minutos.

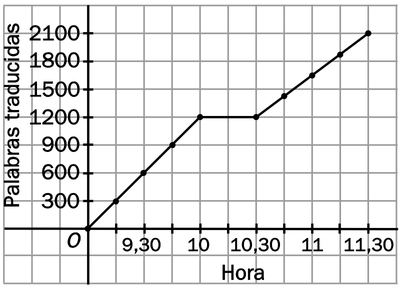
b) Representa gráficamente los datos de la tabla.

c) ¿Es una función continua? ¿Es siempre creciente?

a)

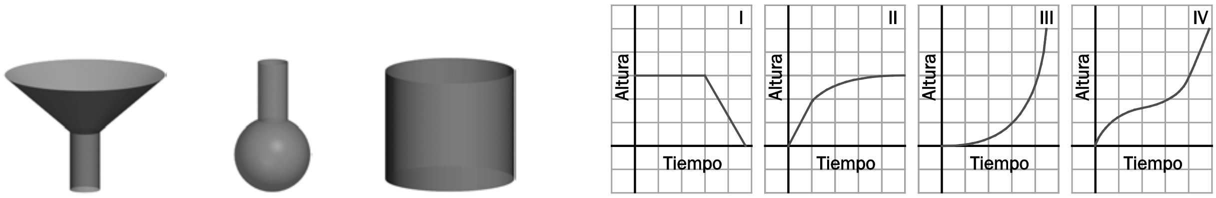
Hora	9.15	9.30	9.45	10.00	10.30	10.45	11.00	11.15	11.30
N.º de palabras	300	600	900	1200	1200	1425	1650	1875	2100

b)



c) Se puede considerar como función continua porque el ritmo de 20 palabras por minuto es una media.

8.73. (TIC) Di si alguna de las gráficas se corresponde con el llenado de alguno de los recipientes que se muestran en la figura. En los que no sea posible, dibuja la gráfica correspondiente.

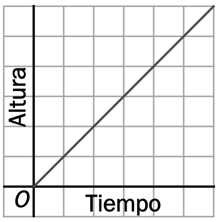


La gráfica 1 se puede descartar, ya que indica que el recipiente tiene agua al comenzar. También la gráfica 3, ya que se corresponde con el llenado de una botella que se llena muy despacio al principio, porque tiene una sección muy grande, y que cada vez se llena más rápido porque su sección se va estrechando.

La gráfica 2 corresponde al primer recipiente, primero se llena muy rápido y de forma lineal en la parte cilíndrica, y luego, más lento a medida que se asciende por el cono.

La gráfica 4 corresponde al llenado del recipiente 2. Este se llena en dos fases, primero la esfera y luego el cilindro. En la esfera, el crecimiento de la función debe ser rápido al principio, ya que las secciones transversales tienen un radio pequeño. Como el radio crece hasta el ecuador de la esfera, al principio, la velocidad a la que aumenta la altura del recipiente es decreciente. Después, el radio disminuye y, por tanto, la velocidad a la que crece la altura aumenta. El último tramo de la gráfica ha de ser una recta de gran pendiente, ya que es el llenado de un cilindro de radio pequeño.

La gráfica correspondiente al recipiente 3 es:

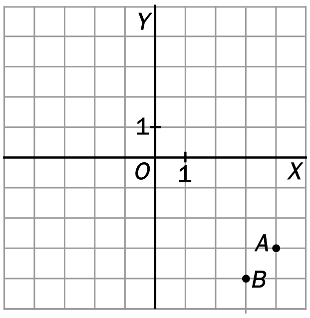


AUTOEVALUACIÓN

8.1. Representa los siguientes puntos en los ejes de coordenadas.

a) Un punto *A* de abscisa 4 y ordenada –3.

b) Un punto *B* de abscisa 3 y ordenada –4.



8.2. La función *f* asigna a cada número natural el resultado de sumarle 3 y elevar la suma al cuadrado, y la función *g* asocia a cada número natural el resultado de elevarlo al cuadrado y sumarle 3.

a) Escribe las expresiones de *f* y de *g*.

b) ¿Son *f* y *g* funciones iguales?

c) Halla las imágenes de 2, 5 y 0 según *f*.

d) Halla las imágenes de 2, 5 y 0 según *g*.

a) $f(x) = (x + 3)^2$; $g(x) = x^2 + 3$

b) *f* y *g* son funciones diferentes.

c) $f(2) = (2 + 3)^2 = 5^2 = 25$ $\quad f(5) = (5 + 3)^2 = 8^2 = 64$ $\quad f(0) = (0 + 3)^2 = 9$

d) $g(2) = 2^2 + 3 = 7$ $\quad g(5) = 5^2 + 3 = 28$ $\quad g(0) = 0^2 + 3 = 3$

8.3. Si $f(x) = 2x – 3$, copia en tu cuaderno y halla los valores que faltan.

a) $f(–2) = \square$ **c) $f(0) = \square$**

b) $f(\square) = 0$ **d) $f(\square) = 1$**

a) $f(–2) = 2 \cdot (–2) – 3 = –4 – 3 = –7$

c) $f(0) = 2 \cdot 0 – 3 = –3$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow 2x – 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

d) $f(x) = 1 \Rightarrow 2x – 3 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{4}{2} = 2$

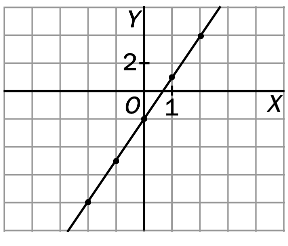
8.4. Dada la función $y = 3x – 2$.

a) Construye una tabla de valores. **b) Representa gráficamente la función.**

a)

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–5	–2	1	4

b)



PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Analiza e interpreta > El viaje de Sara

Sara ha estado este verano de viaje. Ha recorrido varias ciudades, en las que había diferencias de temperatura bastante grandes. Por curiosidad, ha ido apuntando en una tabla la temperatura media durante cada día de su viaje.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Temperatura (ºC)	22	21	24	25		29	36	29	27	22	15	21	24	22	23

8.1. El quinto día, Sara no pudo apuntar la temperatura. Recuerda que subió, pero no demasiado bruscamente, y que el cambio al día siguiente fue mayor. ¿Qué dato podría encajar con esta descripción?

Podría ser, por ejemplo, 26 ºC.

8.2. ¿Cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas durante el viaje?

La temperatura máxima y la mínima fueron 36 y 15 ºC, respectivamente.

8.3. Suponiendo que en este viaje no salió de España, ¿cómo explicarías las diferencias de temperatura?

Las diferencias se explican por los distintos climas en España y por la altura a la que se encuentra cada día. El máximo podría corresponder a un día caluroso en alguna región semidesértica, ya que hay mucha variación respecto a los días más próximos, y el mínimo correspondería a una zona de montaña.

Sara quiere hacer un resumen de sus vacaciones, en el que pondrá fotos de los lugares visitados, recuerdos del viaje, etc.

A su madre no le gustan mucho las tablas de Sara, y le sugiere que quedaría mejor alguna gráfica con los datos que ha ido anotando durante todos esos días.

Además de las temperaturas, Sara ha recogido la distancia recorrida cada día y las horas de viaje.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Horas	6	1	3	1	1	3	3	4	0,25	3	3	2	1	0,25	0,25

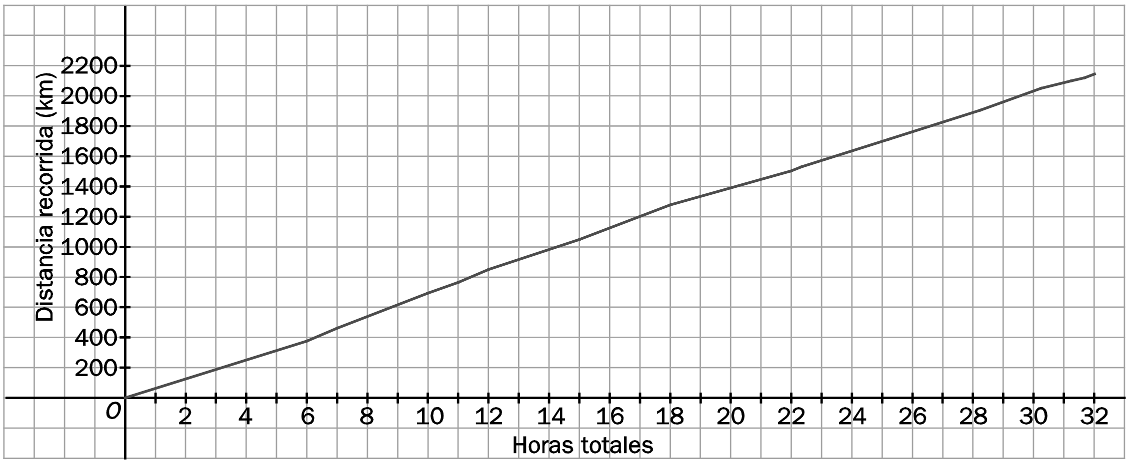
Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Distancia (km)	390	75	240	70	60	210	220	250	10	200	180	145	90	10	10

8.4. Sara ha decidido dibujar una sola gráfica. Para hacerlo, ha unido los datos en una tabla, en la que aparecen las horas totales y la distancia total recorrida. Completa la tabla y dibuja la gráfica correspondiente.

Horas totales	0	6	7	10												
Distancia recorrida (km)	0	390	465	705												

Horas totales	0	6	7	10	11	12	15	18
Distancia recorrida (km)	0	390	465	705	775	835	1045	1265

Horas totales	22	22,25	25,25	28,25	30,25	31,25	31,5	31,75
Distancia recorrida (km)	1515	1525	1725	1905	2050	2140	2150	2160



8.5. Sara ha hecho todo el viaje en coche. ¿Cuál ha sido su velocidad media?

La velocidad media ha sido 2160 : 31,75 = 68 km/h.

8.6. Sara escribió una carta a un amigo, en la que le contó su viaje. Escribe la carta. Debes dar información sobre el viaje, pero es una carta a un amigo, no te limites a dar los datos. Puedes usar también los datos de las temperaturas de la actividad anterior. ¡A ver quién cuenta el viaje más interesante!

Respuesta abierta. Cada alumno elaborará su propia carta.