2º de bachillerato Matemáticas II
Bloque 2 de 4 - Geometría en el espacio

www.ebaumatematicas.com

Cualquier error o ausencia en este documento, por favor, comunicarlo al correo ebaumatematicas@gmail.com

Geometría en el espacio en pruebas EBAU de ESPAÑA

Resueltos con todo detalle en www.ebaumatematicas.com

Andalucía

1. Andalucía Extraordinaria 2023. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x-y+z=0$ y $\pi_2 \equiv x+y=2$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto P(2, 6, –2).

b) **[1 punto]** Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

Solución: a) $d(P,r)=\sqrt{30}\simeq 5.47\,u$ *b) Los planos* π_1 *y* π_2 *son perpendiculares.*

2. Andalucía Extraordinaria 2023. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos A(0, 2, –2), $B(3,\ 2,\ 1)$ y C(2, 3, 2) con los planos cartesianos.

Solución: El volumen del tetraedro es de $18\ u^3$.

3. Andalucía Ordinaria 2023. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

El plano perpendicular al segmento de extremos P(0, 3, 8) y Q(2, 1, 6) que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

Solución: $32\sqrt{3}\simeq 55.426$ *unidades cuadradas*

4. Andalucía Ordinaria 2023. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el punto A(–1, 1, 3) y la recta *r* determinada por los puntos B(2, 1, 1) y C(0, 1, –1)

a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta *r*.

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Solución: a) 3.54 unidades b) 5 unidades cuadradas

5. Andalucía Extraordinaria 2022. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x+1=y-a=-z$ y $s \equiv \begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=-3 \\ z=2-\lambda \end{cases}$

a) Calcula *a* para que *r* y *s* se corten. Determina dicho punto de corte. **(1,5 puntos)**

b) Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8,-7,2)$ y que contiene a la recta *s*. **(1 punto)**

Solución: a) a = 7. A(–11, –3, 10) b) $\pi \equiv 4x+3y+8z-27=0$

6. Andalucía Extraordinaria 2022. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sea el plano $\pi \equiv x+y-z=2$ y la recta $r \equiv x=\frac{y}{3}=z-1$.

a) Calcula, si existe, el punto de intersección de π y *r*. **(0,75 puntos)**

b) Dado el punto $Q(2,6,3)$, halla su simétrico respecto del plano π. **(1,75 puntos)**

Solución: a) A(1, 3, 2) b) Q´(0, 4, 5)

7. Andalucía Ordinaria 2022. <u>EJERCICIO 7</u> (2.5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$, así como el punto A(−4, 4, 7).

a) Calcula *a* y *b* para que el vector $\vec{w}=(1,a,b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

Solución: a) a = –5/2; b = 2 b) O(0, 0, 0); A(–4, 4, 7); B(–2, 4, 6) y C(–2, 0, 1).

8. Andalucía Ordinaria 2022. <u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv x-2=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ así como la recta *s* determinada por el punto P(1, 2, 3) y el vector director $\vec{v}=(1+a,-a,3a)$.

a) Calcula *a* para que las rectas *r* y *s* se corten. **(1,5 puntos)**

b) Calcula *a* para que las rectas *r* y *s* sean perpendiculares. **(1 punto)**

Solución: a) a = 6 b) a = –1/8

9. Andalucía Extraordinaria 2021. <u>EJERCICIO 7</u> (2.5 puntos)

La recta perpendicular desde el punto A(1,1,0) a un cierto plano π corta a éste en el punto $B=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

a) Calcula la ecuación del plano π. **(1.5 puntos)**

b) Halla la distancia del punto *A* a su simétrico respecto a π. **(1 punto)**

Solución: a) $\pi \equiv -y+z=0$ *b)* $d(A,A´)=\sqrt{2}\,u$

10. Andalucía Extraordinaria 2021. <u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=1 \\ z=-3-\lambda \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*. **(1.25 puntos)**

b) Halla la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*. **(1.25 puntos)**

Solución: a) Las rectas r y s se cortan en un punto b) $t \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$

11. Andalucía Ordinaria 2021. <u>EJERCICIO 7</u> (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ -3x+2y+2z+1=0 \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$$

a) Calcula el plano perpendicular a la recta *s* que pasa por el punto *P(1, 0, –5)*. **(1.5 puntos)**
b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta *r* con el plano $\pi \equiv -2x+y+2z=0$. **(1 punto)**

Solución: a) $\pi \equiv -2x+y+2z+12=0$ *b)* $sen(r,\pi)=\frac{1}{3\sqrt{138}}$

12. Andalucía Ordinaria 2021. <u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{3}$ y la recta *s*, que pasa por los puntos *P(1, 0, 2)* y *A(a, 1, 0)*, se cortan en un punto. Calcula el valor de *a* y el punto de corte.

Solución: a = 2. El punto de corte de las rectas es $P(-1,-2,6)$

13. Andalucía Extraordinaria 2020. <u>EJERCICIO 4</u> (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x-y+az=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x-3y+4z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$

a) Halla *a* sabiendo que π es paralelo a *r*. **(1.5 puntos)**
b) Determina el plano perpendicular a *r* que pasa por el punto *P(1,2,3)*. **(1 punto)**

Solución: a) a = 3 b) $\pi': 5x+8y+z-24=0$

14. Andalucía Extraordinaria 2020. <u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x-y+z=2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-1}$.

a) Calcula la distancia entre *r* y *π*. **(1 punto)**
b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a *r*. **(1.5 puntos)**

Solución: $d(r,\pi)=\sqrt{3}=1.732\,u$ b) $\pi': y+z+3=0$

15. Andalucía Ordinaria 2020. <u>EJERCICIO 4</u> (2.5 puntos)

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x-1=y-2=\frac{z-1}{a} \qquad y \qquad s \equiv \frac{x-3}{-a}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a. **(1.25 puntos)**
b) Para $a=2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de *r* y *s* y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

Solución: a) Si $a=\pm 2$ *las rectas se cortan en un punto. Si* $a \neq \pm 2$ *las rectas se cruzan (tienen distinta dirección y están en planos paralelos, no son coplanarias. b)* $t \equiv \begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=2-6\lambda, \quad con\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1+\lambda \end{cases}$

16. Andalucía Ordinaria 2020. <u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

Se considera el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por *A* y es perpendicular a *r*. **(1.25 puntos)**
b) Calcula la ecuación del plano que pasa por *A* y contiene a *r*. **(1.25 puntos)**

Solución: a) $\pi \equiv -3x+3y+z+9=0$. b) $\pi' \equiv -y+3z-2=0$

17. Andalucía Septiembre 2019. Opción A. Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Se consideran los vectores $\vec{u}=(1,2,3)\ \vec{v}=(1,-2,-1)\ \vec{w}=(2,\alpha,\beta)$, donde α y β son números reales.

a) [0,75 puntos] Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) [0,75 puntos] Determina los valores de α y β para los que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección.

c) [1 punto] Para $\alpha=8$ determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución: a) $\alpha=2$ *y* $\beta=-2$ *b)* $\alpha=-4$ *y* $\beta=-2$ *c)* $\beta=10$

18. Andalucía Septiembre 2019. Opción B. Ejercicio 4.- Considera las rectas $r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-k}{2}=\frac{z}{2}$ y $s\equiv\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}$

(a) **[1’25 puntos]** Halla *k* sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.

(b) **[1’25 puntos]** Para *k = 1*, halla la ecuación general del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*.

Solución: a) k = –2 *b)* $\pi\equiv y-z-1=0$

19. Andalucía Junio 2019. Opción A. Ejercicio 4.- Considera la recta $r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1\equiv x=0$ y $\pi_2\equiv y=0$.

a) [1,25 puntos] Halla los puntos de la recta ***r*** que equidistan de los planos π_1 y π_2.

b) [1,25 puntos] Determina la posición relativa de la recta ***r*** y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución: a) $P_r(2,2,1)$ *o bien* $P_r(4,-4,-1)$ *b) Las rectas se cruzan*

20. Andalucía Junio 2019. Opción B. Ejercicio 4.- Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,1,0), B(1,0,2) y C(0,2,1).

(a) [1,25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

(b) [1,25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución: a) $Área=\frac{\sqrt{14}}{2}u^2$ *b)* $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0,2581$.

21. **Andalucía Septiembre 2018. A.4.** Considera las rectas

$$r:\frac{x+1}{2}=y=\frac{z+1}{3}\quad \text{y}\quad s:\begin{cases}2x-3y=-5\\ y-2z=-1\end{cases}$$

a) Estudia y determina la posición relativa de *r* y *s*.

b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.

Solución: a) Se cruzan *b)* $\text{Distancia}=\frac{3\sqrt{3}}{5}u$

22. **Andalucía Septiembre 2018. B.4.** Considera las rectas

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{m}=z\quad \text{y}\quad s:\begin{cases}x+nz=-2\\ y-z=-3\end{cases}$$

a) Halla los valores de *m* y *n* para los que *r* y *s* se cortan perpendicularmente.

b) Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s.

Solución: a) m=4 y n=2,5 b) $-2x+3y-5z+5=0$

23. Andalucía Junio 2018. A.4. Considera los puntos P(1,0,-1), Q(2,1,1) y la recta r dada por: $x-5=y=\dfrac{z+2}{-2}$

a) Determina el punto simétrico de P respecto de r.

b) Calcula el punto de r que equidista de P y Q.

Solución: a) P'(7,-2,1) b) P''(9/2,-1/2,-1)

24. Andalucía Junio 2018. A.4. Considera el punto P(2,-1,3) y el plano π de ecuación 3x+2y+z=5.

a) Calcula el punto simétrico de P respecto de π.

b) Calcula la distancia de P a π.

Solución: a) $P'\left(\frac{8}{7},\frac{-11}{7},\frac{19}{7}\right)$ *b)* $\text{Distancia}=\frac{\sqrt{14}}{7}\,u$

25. Andalucía Septiembre 2017. A.4. Los puntos *A(1, 1, 1)* , *B(2, 2, 2) y C(1, 3, 3)* son vértices consecutivos del paralelogramo *ABCD*.

a) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo.

b) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

c) [0,5 puntos] Calcula las coordenadas del vértice *D*.

Solución: a) $\text{Área de } ABCD=\sqrt{8}=2{,}8284\,u^2$ *b)* $\pi\equiv y-z=0$ *c)* $D=(0,2,2)$

26. Andalucía Septiembre 2017. B.4. Considera el punto *P(0, 1, 1)* y la recta r dada por $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=\ \ 2 \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Solución: a) $\pi\equiv x-2y+3z-1=0$ *b)* $P'\left(-\frac{6}{5},\frac{17}{5},3\right)$

27. Andalucía Junio 2017. A.4. Considera el punto *P(1, -1, 0)* y la recta r dada por $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2 \\ z=t \end{cases}$.

a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

b) [1'25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Solución: a) $\pi\equiv x-3z-1=0$ *b)* $P'(1,-3,0)$

28. Andalucía Junio 2017. B.4. Considera los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,2,1)$ y $\vec{w}=(m,1,n)$.

a) [1,25 puntos] Halla m y n sabiendo que $\vec{u},\vec{v}\ y\ \vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) [1,25 puntos] Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u},\vec{v}\ y\ \vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

Solución: a) $n=\frac{1}{4};\quad m=-\frac{1}{4}$ *b)* $m=-\frac{59}{2}$ ó $m=\frac{61}{2}$

Aragón

1. Aragón Extraordinaria 2023. 8)

Si los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w},\quad \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w},\quad \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s}\times\left(\vec{t}-\vec{r}\right)$ donde × representa el producto vectorial de dos vectores.

Solución: a) Los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ *son linealmente dependientes. b)* $\vec{0}$

2. Aragón Ordinaria 2023. 8) El plano $\pi\equiv 2x+by-2z+4=0$, $b\in\mathbb{R}$ y $b\neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos *A*, *B* y *C*. Calcula los valores de $b\in\mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos *A*, *B* y *C* sea 6 u^2.

Solución: Los valores de b buscados son –1 y +1.

3. Aragón Ordinaria 2023. 9) Si los vectores $\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r},\ \vec{s},\ \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r}=2\vec{u}+\vec{w},\quad \vec{s}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w},\quad \vec{t}=-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$$

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente $\vec{u}\cdot\vec{r}+\vec{v}\cdot\vec{s}+\vec{w}\cdot\vec{t}$ donde · representa el producto escalar de dos vectores.

Solución: a) Los vectores $\{\vec{r},\ \vec{s},\ \vec{t}\}$ *son linealmente independientes. b) 4*

4. Aragón Extraordinaria 2022. 8)

El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice *D* sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

Solución: Hay dos soluciones del problema: $D\left(0,\frac{67}{7},0\right)$ *y* $D'\left(0,\frac{-53}{7},0\right)$

5. Aragón Ordinaria 2022. 8)

a) (1 punto) Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2, y además pasa por el punto $(-1,2,1)$, siendo

$$r_1=\frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}\quad \text{y}\quad r_2\equiv\begin{cases}x=-1+6t\\ y=-2t\\ z=t\end{cases}$$

b) (1 punto) Dado el vector $\vec{v}=(2,k,2k)$, calcula el valor $k\in\mathbb{R}$ para que $\vec{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

Solución: a) $\pi\equiv x+y-4z+3=0$ *b) k = 2/7*

6. Aragón Ordinaria 2022. 9)

a) (1 punto) Dados los vectores $\vec{v_1}=a\vec{u_1}-2\vec{u_2}+3\vec{u_3},\ \vec{v_2}=-\vec{u_1}+a\vec{u_2}+\vec{u_3}$, determina el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1

b) (1 punto) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{v_1},\ \vec{v_2}$ *y* $\vec{v_3}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$, siendo $\vec{v_1}=(1,0,-2)$ y $\vec{v_2}=(3,1,0)$

Solución: a) a = 1 b) 0

7. Aragón Extraordinaria 2021. 8) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, –2, 0) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1, 0, 1), (3, 1, 0) y (2, –1, 1). Exprésela como intersección de dos planos.

Solución: $r\equiv\begin{cases}x-y-3=0\\3y-z+6=0\end{cases}$

8. Aragón Ordinaria 2021. 8) Aragón Ordinaria 2021. 8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A=(0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_2\equiv x+2z=1$, siendo:

$B_1=(-1,0,2)$, $B_2=(1,3,1)$, $B_3=(2,-1,0)$.

Solución: $r\equiv\begin{cases}3x-2y+2=0\\-y-3z+4=0\end{cases}$

9. Aragón Ordinaria 2021. 9) Sean los siguientes vectores:

$$\vec{u_1}=(-1,1,1),\ \vec{u_2}=(0,3,1),\ \vec{u_3}=(1,-2,0),\ \vec{u_4}=(-2,0,1)$$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo $\vec{v_1}=2\vec{u_1}-\vec{u_2},\ \ \vec{v_2}=\vec{u_1}+\vec{u_3},\ \ \vec{v_3}=\vec{u_4}$

b) (1 punto) Calcule las siguientes expresiones:

$$\left(2\vec{u_1}-\vec{u_2}\right)\cdot\left(2\vec{u_1}-\vec{u_2}\right),\ \left(\vec{u_4}-\vec{u_1}\right)\times\left(\vec{u_4}-\vec{u_1}\right),$$

siendo · y × los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

Solución: a) Son linealmente independientes b) $\left(2\vec{u_1}-\vec{u_2}\right)\cdot\left(2\vec{u_1}-\vec{u_2}\right)=6\cdot\ \left(\vec{u_4}-\vec{u_1}\right)\times\left(\vec{u_4}-\vec{u_1}\right)=(0,0,0)$

10. Aragón Extraordinaria 2020. 4) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases}3x+y-4z+1=0\\2x+y-z+2=0\end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi:2x-y+3z-1=0$

Solución: $\pi':2x+y-z+2=0$

11. Aragón Ordinaria 2020. 4) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + \quad z = 1 \\ 2x + y \quad = 3 \end{cases}$

a) (*1,25 puntos*) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto (0,0,1).

b) (*0,75 puntos*) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ Sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = (-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

Solución: a) $\pi \equiv x + z - 1 = 0$ *b) Volumen =* $3\,u^3$

12. Aragón Septiembre 2019. Opción A. 2. a) (*0,75 puntos*) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,1,0)$ *y* $\vec{w}$, siendo $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, y donde el símbolo × representa el producto vectorial.

b) (*0,75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto P:(1,3,2) y es perpendicular a la recta.

$$r : \begin{cases} 3x - 2y \qquad = -1 \\ \qquad 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solución: a) Volumen = 6 u^3 b) $\pi : 2x + 3y - 2z - 7 = 0$

13. Aragón Septiembre 2019. Opción B. 2. (*1,5 puntos*) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r : \begin{cases} 3x + y \qquad = -1 \\ \qquad 4y + 3z = 5 \end{cases}$$

y pasa por el punto A:(1,3,−1).

Solución: a) $\pi : 4x - 8y - 7z + 13 = 0$ *o en paramétricas* $\pi \equiv \left. \begin{array}{l} x = 1 + \alpha - \lambda \\ y = 3 - 3\alpha - 4\lambda \\ z = -1 + 4\alpha + 4\lambda \end{array} \right\}$

14. Aragón Junio 2019. Opción A. 2. a) (*1 punto*) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados A:(1,1,2), B:(2,2,2) y C:(−1,a,b) y determine la recta que los contiene.

b) (*0,5 puntos*) Dados dos vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, calcule el vector:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$$

Donde el símbolo "×" representa el producto vectorial.

Solución: a) Para a = –1 y b = 2 están alineados y la recta que definen es $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$. *b) 0.*

15. Aragón Junio 2019. Opción B. 2. a) (*1 punto*) Determine la ecuación del plano determinado por el punto P:(2,1,2) y la recta $r : (1,0,0) + t(-1,1,1)$.

b) (*0,5 puntos*) Dados los vectores $\vec{u} = (1,2,0)$ *y* $\vec{v} = (2,1,-3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

Solución: a) $\pi \equiv x + 3y - 2z - 1 = 0$ *b)* $Área = 3,74\,u^2$

16. Aragón Septiembre 2018. Opción A. 2. *(1,5 puntos)* **a)** *(0,5 puntos)* Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,1)$, $\vec{v}=(2,1,1)$ y $\vec{w}=(0,2,1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

b) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s* siguientes:

$$r:\frac{x+1}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z+2}{1} \qquad s:\begin{cases}-x+y+2z-4=0\\ x+2y+z-5=0\end{cases}$$

Solución: a) El volumen del paralelepípedo es de 1 u^3. b) Las rectas r y s se cruzan

17. Aragón Septiembre 2018. Opción B. 2. *(1,5 puntos)* Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta:

$$r:\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+3y+z=3\end{cases}$$

esté contenida en el plano: $\pi : mx+y+nz=4$

Solución: $m=\frac{5}{3},\ n=\frac{7}{3}$

18. Aragón Junio 2018. A. 2. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (0,0,0) y contiene a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-y-2=0\\ 3y-2z+4=0\end{cases}$$

Solución: $4x+y-2z=0$

19. Aragón Junio 2018. B. 2. Considere el plano $\pi:2ax+y+az=4$ y la recta:

$$r:\begin{cases}2x+y+z=2\\ -x+y+2z=3\end{cases}$$

a) Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de a.
b) Para a = 2, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto P(0,1,0).

Solución: a) Si a≠1 son secantes. Si a=1 son paralelos. b) $\frac{x}{4}=y-1=\frac{z}{2}$

20. Aragón Septiembre 2017. Opción A. 2. *(2 puntos)* **a)** *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x-2y+z=1 \qquad \pi':\begin{cases}x=2\lambda+\mu\\ y=\lambda+k\mu\\ z=1-\mu\end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real **k**.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman esos planos cuando **k** = 3.

Solución: a) Para k = 0 los planos son coincidentes. Para k ≠ 0 los planos son secantes. b) α = 90º

21. Aragón Septiembre 2017. Opción B. 2. *(2 puntos)* **a)** *(1,5 puntos)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-3y+z=4\\ y+z=0\end{cases}$$

y pasa por el punto *P*:(2,1,−1).

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi: 2x - 3y + z = 4$$
$$\pi': \quad y + z = 0$$

Solución: a) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ *b)* α *= 112º*

22. Aragón Junio 2017. A. 2. *(2 puntos)* **a)** *(1 punto)* Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - y \quad = 0 \\ \quad 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto P(0, 0, 0) a cada una de las dos rectas anteriores.

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $d(P,r) = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $d(P,s) = 0$

23. Aragón Junio 2017. B. 2. *(2 puntos)* **a)** *(1 punto)* Sea "*m*" una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de "*m*":

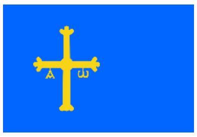
$$\pi: mx - 6y + 2z = 2 \qquad \pi': \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x \quad + z = 1 \\ \quad y \quad = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

Solución: a) Si m = –2 son paralelos y si m $\neq$ *–2 son secantes. b)* α *= 36º*

Asturias



1. Asturias Extraordinaria 2023. Problema 5.

Sea s la recta de ecuación $x-2=\dfrac{y-2}{-1}=z$ y r la recta que pasa por los puntos A=(1,0,1) y B=(2,1,2).

(a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de r y s.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Solución: a) las rectas se cruzan (rectas no paralelas sin punto en común). b) $\pi \equiv x-z-2=0$.
c) $\sqrt{2}$ *unidades.*

2. Asturias Extraordinaria 2023. Problema 6. Dados los planos $\pi \equiv x+y+z=3$, $\pi' \equiv x+y=3$ y el punto A=(2,1,6)

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π´.
(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A´ simétrico de A respecto del plano π.

Solución: a) Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{u_r}=(1,-1,0)$ *y un punto es* $P_r(0,3,0)$.
b) $P(0,-1,4)$ *c)* $A'(-2,-3,2)$

3. Asturias Ordinaria 2023. Problema 5.

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax+2y+(a-3)z=4$,

(a) **(1.25 puntos)** Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π.
(b) **(1.25 puntos)** Para $a = 1$, calcula el plano π´ que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución: a) Recta y plano son paralelos para a = 2. b) $\pi' \equiv -2x-2y-3z+5=0$

4. Asturias Ordinaria 2023. Problema 6. Dados los puntos A = (1, 0, 0) y B = (–1, 4, –4),

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos
(b) **(0.5 puntos)** Calcula la distancia de A a π
(c) **(0.5 puntos)** Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B

Solución: a) $\pi: x-2y+2z+8=0$. *b) 3 unidades. c)* $s \equiv \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{-4}$

5. Asturias Extraordinaria 2022. Bloque 3.A.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1 \\ z=-\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y el vector $\vec{v}=(1,1,1)$.

(a) **(0.5 puntos)** Calcula $\overrightarrow{v_r}$ un vector director de r.
(b) **(1 punto)** Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u}\times\overrightarrow{v_r}$ es proporcional a $\vec{v}$.

(c) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s′, siendo $s' \equiv x-1=\frac{y-1}{-2}=z$

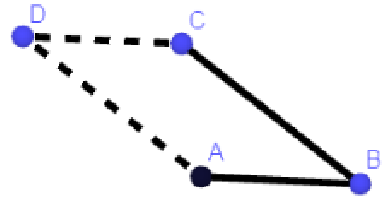
Solución: a) $\overrightarrow{v_r}=(1,0,-1)$ *b)* $\overrightarrow{u_s}=(-1,2,-1)$ *c)* $\pi \equiv x+y+z-2=0$

6. Asturias Extraordinaria 2022. Bloque 3.B. Dados los puntos A = (1, 0, 1), B = (1, 6, 1), C = (–2, –1, 5) y E = (–1, 1 , 1).

(a) **(0.5 puntos)** Calcula ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

(b) **(1 punto)** Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo y el área de ABCD.

(c) **(1 punto)** Halla ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por E.



Solución: a) $\pi \equiv 4x+3z-7=0$ *b) D(–2, –7, 5). Área = 30 u²*. *c)* $r \equiv \begin{cases} x=-1+4\lambda \\ y=1 \\ z=1+3\lambda \end{cases}$

7. Asturias Ordinaria 2022. Bloque 3.A.

Sea la recta que pasa por los puntos A = (1, 0, 1) y B = (2, 1, 2) y s la recta $s \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$.

(a) **(0.75 puntos)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Solución: a) Se cruzan. *b)* $\pi \equiv x-z-2=0$ *c)* $\sqrt{2}\ u$

8. Asturias Ordinaria 2022. Bloque 3.B.

Dados los planos $\pi \equiv x+y+z=3,\ \pi' \equiv x+y=3$ ye el punto A = (2, 1, 6)

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π′.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A′ simétrico de A respecto del plano π.

Solución: a) $P_r(3,0,0);\ \overrightarrow{v_r}(-1,1,0)$ *b) P(0, –1, 4)* *c) A´ (–2, –3, 2)*

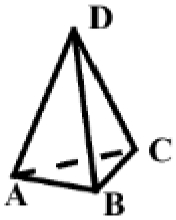
9. Asturias Extraordinaria 2021. Bloque 3.A. Sea el tetraedro de la figura formado por A(3, 0. 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 6) y D(α, 3, 1). Calcula:

a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C. (0.5 puntos)

b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. (0.75 puntos)

c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior. (0.75 puntos)

d) Para α = 5, el punto D´ simétrico de D respecto al plano π. (0.5 puntos)



Solución: a) $\text{Área } ABC=3\sqrt{14}\simeq 11.225\,u^2$ *b)* $\pi \equiv 2x+3y+z-6=0$ *c) α = 5 d)* $D'(1,-3,-1)$

10. Asturias Extraordinaria 2021. Bloque 3.B. Sean el punto P(1, 0, 1) y la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

Calcula:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta *r*. (0.75 puntos)

b) La distancia de *r* a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia. (1 punto)

c) La ecuación del plano π que contiene a *r* y está a la misma distancia de P que *r*. (0.75 puntos)

Solución: a) $r:\begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$ *b)* $d(r,P)=\sqrt{2}\,u \quad Q(0,0,0)$ *c)* $\pi\equiv x+z=0$

11. Asturias Ordinaria 2021. Bloque 3.A. Dadas las rectas

$r:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=z \quad y \quad s:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas se cruzan. (0.75 puntos)

b) Obtenga el plano π que contiene a *s* y es paralelo a la recta *r*. Halla la distancia entre el punto $P=(-1,1,0)$ de la recta *r* y el plano π (1.25 puntos)

c) Calcula la distancia entre las rectas. (0.5 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com *b)* $\pi\equiv x+2y+z=0 \quad d(P,\pi)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\simeq 0.408\,u$ c) $d(r,s)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}u$

12. Asturias Ordinaria 2021. Bloque 3.B. Dados los puntos A(1, 1, 0) y B(0, 0, 2) y la recta $r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ Halla:

a) Un punto $C\in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B. (1.25 puntos)

b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a *r*. (1.25 puntos)

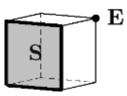
Solución: a) $C=(1,5,5)$ *b)* $\pi\equiv -3x+y-z+2=0$

13. Asturias Extraordinaria 2020. Bloque 3.A. Sean *A*(2, 1, 0), *B*(5, 5, 0) y *C*(2, 1, 5) tres vértices de la cara *S* de un cubo (cuadrados iguales) y *E*(−2, 4, 0) un vértice de la cara opuesta. Se pide:

a) El cuarto vértice *D* de la cara *S*. (1 punto)

b) La ecuación del plano *π* que contiene la cara opuesta de *S*. (1 punto)

c) ¿Cuál es el vértice de la cara *S* adyacente a *E*? (0.5 puntos)



Solución: a) $D(5,5,5)$ *b)* $\pi\equiv 4x-3y+20=0$ *c) El vértice adyacente a E es el A.*

14. Asturias Extraordinaria 2020. Bloque 3.B. Dados dos planos $\begin{cases} \pi: x+y-2z=3 \\ \pi': x-z=5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π´ es el punto A(5, 1, 0)

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta *r* que une P y A. (1.5 puntos)

b) Calcula el punto P. (1 punto)

Solución: a) $\left.\begin{matrix} y-1=0 \\ x+z-5=0 \end{matrix}\right\}$ *b)* $P(4,1,1)$

15. Asturias Ordinaria 2020. Bloque 3.A. Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r:\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

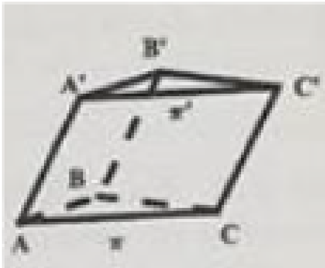
a) Calcula un vector director de la recta *r*. (0.75 puntos)

b) La ecuación del plano π que contiene al punto *A* y a la recta *r*. (0.75 puntos)

c) La ecuación de la recta *s* contenida en π que pasa por *A* y es perpendicular a *r*. (1 punto)

Solución: a) $\vec{v_r}=(-1,1,-1)$. *b)* $\pi: 2x+y-z-4=0$ *c)* $s: \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1+t \\ z=1+t \end{matrix}\right\}$

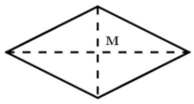
16. Asturias Ordinaria 2020. Bloque 3.B. Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0); B'(-1,2,2); C(0,3,0); C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos *A, B, C* y π', al que pertenecen los puntos *A´, B´, C´*. Calcula:



a) Las coordenadas de los puntos restantes: *A´, B.* (0.75 puntos)
b) La distancia entre los planos π y π´. (0.75 puntos)
c) El volumen del prisma triangular. (1 punto)

Solución: a) $A'(1,1,2);\quad B(-1,1,0)$ *b)* $d(\pi,\pi')=2\,u$ c) $Volumen=5\,u^3$

17. Asturias Julio 2019. A. 3. Sean A(3, 1, 0) y B(1, 3, 0) los vértices opuestos de un rombo situado en el plano π : z = 0.



a) Calcula un vector director $\vec{v_r}$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)
b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)

Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

Solución: a) $\vec{v_r}=(1,1,0)$ *y la recta es* $r:\begin{cases} x=2+t \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases}$ *b)* $C(3,3,0)$ *y* $D(1,1,0)$

18. Asturias Julio 2019. B. 3. Dados el plano $\pi: x+y=1$ y la recta r que pasa por el punto A(1,1,1) con vector director $\vec{v_r}=(0,1,1)$. Calcula:
a) El punto P intersección del plano π y de la recta r. (1.25 puntos)
b) El punto A´ simétrico de A respecto al plano π. (1.25 puntos)

Solución: a) P(1,0,0). b) A´ (0,0,1)

19. Asturias Junio 2019. A. 3. Sean los planos $\pi_1: x+y+z=0$ y π_2 : Su intersección es la recta $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:
a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1;1;1)\in\pi_2$. (1.25 puntos)
b) La ecuación de un plano π'_1 paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta *r*. (1.25 puntos)

Solución: a) $\pi_2 \equiv -x+2y-z=0$ *b) El plano puede ser* $\pi'_1: x+y+z+3=0$ o $\pi'_1: x+y+z-3=0$

20. Asturias Junio 2019. B. 3. Sean los puntos $A(1,1,1),\quad B(1;-1;-1)$: Calcula:
a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)
b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

Solución: a) $\pi \equiv y+z=0$ *b)* $C\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ *y* $D\left(1,\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}\right)$

21. Asturias Julio 2018. A.3. Los puntos A(0,1,0) y B(-1,1,1) son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $s:\begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$. Además, la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) Determina el punto C.
b) Calcula el área del triángulo.

Solución: a) C(4,1,1) b) Área=2,5 u^2

22. Asturias Julio 2018. B.3. Dados los puntos A(2,1,0) y B(1,0,–1) y *r* la recta que determinan. Y sea *s* la recta definida por $s:\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas.
b) Determina un punto C de la recta *s* tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.

Solución: a) Se cortan en un punto. b) C(1,1,–1)

23. Asturias Junio 2018. A. 3. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta *r* viene dada por las ecuaciones $r:\dfrac{x-1}{2}=y+1=-z+2$

Calcula:

a) Un vector director $\vec{v}$ de *r*. (0.75 puntos)
b) Un vector director $\vec{u}$ de *s* sabiendo que $\vec{v}\times\vec{u}$ es proporcional al vector (1; 0; 2). (1 punto)
c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

Solución: a) $\vec{v}=(2,1,-1)$ b) $\vec{u}=(2,-5,-1)$ c) $\pi: x+2z=5$

24. Asturias Junio 2018. B. 3. Dado la recta $r:\begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$, el punto Q(1; 1; 1) y un plano π.

a) Calcula el punto P de la recta *r* que verifica $d(P;Q)=1\,u$. (1.25 puntos)
b) Se sabe que $Q\in\pi$ y que *d(P;Q) = d(P;π)*. Determina la ecuación del plano π. (1.25 puntos)

Solución: a) P(1,1,0) b) z = 1

25. Asturias Julio 2017. A. 3. Sea el punto A(1, 2, 0) perteneciente a un plano π. Calcula:

a) La ecuación del plano π sabiendo que P(0, 0,–2) pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)
b) La ecuación de un plano paralelo a π y que esté a distancia 3 unidades del mismo. (1 punto)
c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi': 2x-y=0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A. (Observación: $A\in\pi'$) (0.5 puntos)

Solución: a) $\pi: x+2y+2z=5$ *b)* $\pi'': x+2y+2z-14=0$ *ó* $\pi'': x+2y+2z+4=0$ *c) B(–1,–2,5) ó B(3, 6, –5)*

26. Asturias Julio 2017. B. 3. Dada la recta $r:\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-5z=2 \end{cases}$ y el plano $\pi: ax-y+z+1=0$

a) Halla el valor de *a* para que sean paralelos. (1.5 puntos)
b) Para *a = 2*, calcula la ecuación del plano π´ que contiene a *r* y es perpendicular a π. (1 punto)

Solución: a) a = 2 b) $\pi': 4x+y-7z-4=0$

27. Asturias Junio 2017. A. 3. Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ y $s: x+1=\dfrac{y-1}{2}=z$. Calcula:

a) Un vector director de cada recta. (0.75 puntos)
b) El ángulo que forman las rectas. (0.75 puntos)
c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto A(1, 2, 1). (1 punto)

Solución: a) $\vec{v_r}=(-2,1,0)$ $\vec{v_s}=(1,2,1)$ *b)* α *= 90º c)* $\pi: x+2y-5z=0$

28. Asturias Junio 2017. B. 3. Dados los puntos A(1,2,0); B(–1,1,1); C(0,0,1); D(4,1,3): Determina:
a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)
b) La recta *r* que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C. (1 punto)
c) El punto de corte de la recta *r* con el plano π. (0.75 puntos)

Solución: a) No son coplanarios b) $x-4=y-1=\dfrac{z-3}{3}$ *c) C(3,0,0)*

Baleares

1. Baleares Extraordinaria 2023. 5. P3.– Sean los puntos $A=(1,2,0)$, $B=(-1,0,1)$, $C=(0,0,1)$ y $D=(3,1,2)$.

(a) **[4 puntos]** Determina la recta *r* que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A, B y C.
(b) **[4 puntos]** Determina si los puntos A, B, C y D son coplanarios.
(c) **[2 puntos]** ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

Solución: (a) $\pi: y+2z-2=0$. $r:\begin{cases} x=3 \\ y=1+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}, \lambda\in r$ *b) Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.*

(c) El punto de corte de recta y plano es $P\left(3,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$ *diferente al punto* $D=(3,1,2)$.

2. Baleares Extraordinaria 2023. P4.– Sea el plano $\pi: 3x+y+z=2$ y los puntos P = (0, 1, 1) y Q = (2, –1, –3).
(a) **[2 puntos]** ¿Son P y Q puntos del plano **π**? Justifica la respuesta.
(b) **[4 puntos]** Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a 3/4 partes de P y a 1/4 parte de Q
(c) **[4 puntos]** Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π.

Solución: (a) Los puntos P y Q pertenecen al plano ***π****.* *(b)* $S\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2},-2\right)$; $S'(3,-2,-5)$

(c) $s:\begin{cases} x-3z+3=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

3. Baleares Ordinaria 2023. P3.– Considera el plano $\pi: 2x+3y+z-6=0$.
(a) **[3 puntos]** Determina los vértices del triángulo determinado por la intersección del plano con los ejes de coordenadas.
(b) **[3 puntos]** Calcula el área del triángulo anterior.
(c) **[4 puntos]** Sea A el vértice del triángulo sobre el eje de abscisas (eje OX). Calcula la recta perpendicular al plano que pasa por A.

Solución: (a) A(3, 0, 0); B(0,2, 0); C(0, 0, 6) *(b)* $3\sqrt{14}\simeq 11.22$ *unidades cuadradas*

(c) $r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$

4. Baleares Ordinaria 2023. P4.– Sean *a* y *b* dos constantes reales no nulas.
Consideremos el plano $\pi: x+ay-2z=3$ y la recta

$$r:\begin{cases} x+bz=1, \\ y=0. \end{cases}$$

(a) **[4 puntos]** ¿Para qué valores de *a* y *b* la recta *r* es perpendicular al plano π? Para estos casos concretos, calcula el punto de corte entre *r* y π, y calcula o justifica cuál es la distancia de la recta al plano.
(b) **[3 puntos]** ¿Para qué valores de *a* y *b* la recta *r* es paralela al plano π?
(c) **[3 puntos]** ¿Existen algunos valores de *a* y *b* para los cuales la recta *r* está contenida en el plano π?

Solución: (a) Con los valores $a=0;\ b=\frac{1}{2}$ *recta y plano son perpendiculares. El punto de corte es* $P\left(\frac{7}{5},0,\frac{-4}{5}\right)$*. No tiene sentido hablar de distancia entre recta y plano pues la recta corta al plano en el punto P. (b) La recta y el plano son paralelos cuando* $b=-2$*. El valor de a puede ser cualquier valor real. (c) No existen valores que hagan que la recta esté contenida en el plano.*

5. Baleares Extraordinaria 2022. 5. Sea *a* un parámetro real. Considere el plano $\pi \equiv 3x-2y-z=4$, el punto *P(1, 1, 0)* y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x-az=1 \end{cases}$$

En cada caso, si existe, obtenga el valor del parámetro *a* para el cual:
(a) el punto *P* pertenece a la recta *r*. (1 punto)
(b) la recta *r* y el plano π se cortan en un único punto. (3 puntos)
(c) la recta *r* está contenida en el plano π. (3 puntos)
(d) la recta *r* es perpendicular al plano π. (3 puntos)

Solución: (a) El punto P pertenece al plano para cualquier valor de "a". (b) a ≠ 1. (c) La recta no está contenida en el plano para ningún valor de "a". (d) No es posible para ningún valor de "a"

6. Baleares Extraordinaria 2022. 6. Dados los puntos *A(1, 1,1), B(0, 0, –2), C(2, –1, 0), D(–1, 2, –1)* y *E(0, 0, 0)*.
(a) Compruebe que los puntos A, B y C determinan un único plano, π. (2 puntos)
(b) Averigüe si el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo en el vértice A. (3 puntos)
(c) Halle el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y D con el plano π. (3 puntos)
(d) Calcule el volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$. (2 puntos)

Solución: (a) Los puntos no están alineados y los puntos A, B y C definen un único plano. (b) No es rectángulo en A. (c) 0º. (d) 0 u^2

7. Baleares Ordinaria 2022. 5. Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) ABCD, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, –1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, –2).
(a) Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (2 puntos)
(b) Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC. (2 puntos)
(c) Encuentre las coordenadas del vértice D. (4 puntos)
(d) Calcule el área del paralelogramo ABCD. (2 puntos)

Solución: (a) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{\sqrt{57}}$ *(b)* $M=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ *(c) D(3, 2, –3) (d)* $\sqrt{32}\simeq 5.66u^2$

8. Baleares Ordinaria 2022. 6. Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-4-\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}.$$

(a) Encuentre una ecuación vectorial para la recta *r*, (2 puntos)

(b) Encuentre la posición relativa de las rectas *r* y *s*. (3 puntos)
(c) Encuentre la ecuación general del plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto $P(2,0,-1)$ (2 puntos)
(d) Encuentre la ecuación general del plano paralelo a la recta *r* que contiene a la recta *s*. (3 puntos)

Solución: (a) $r \equiv (x,y,z)=(0,3,-1)+t(1,-1,2) \quad ,t\in\mathbb{R}$ *(b) Se cruzan. (c)* $\pi : x-y+2z=0$
(d) $\pi' : x+y-1=0$

9. Baleares Extraordinaria 2021. 5. Donades les rectes

$$(I)\begin{cases} y=x+3, \\ z=2x+2, \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}, \\ x=2z+3, \end{cases}$$

(a) Calcula l'equació vectorial de cada una de les rectes (I) i (II). (1 punt)

(b) Si és possible, calcula el pla paral·lel a la recta (II) que conté a la recta (I). (3 punts)

(c) Calcula el pla perpendicular a la recta (II) que passa pel punt (–1, 0, 2). (3 punts)

(d) Calcula la recta de direcció perpendicular a les de les rectes (I) i (II) que passa per l'origen. (3 punts)

Solución: (a) $(I)\equiv(x,y,z)=(0,3,2)+\lambda(1,1,2);\ \lambda\in\mathbb{R}\ \ (II)\equiv(x,y,z)=\left(3,\frac{-1}{2},0\right)+\beta(2,0,1);\ \beta\in\mathbb{R}$

(b) $\pi\equiv x+3y-2z-5=0$ *(c)* $\pi'\equiv 2x+z=0$ *(d)* $(III)\equiv\begin{cases} x=-\alpha \\ y=-3\alpha, \text{ siendo } \alpha\in\mathbb{R} \\ z=2\alpha \end{cases}$

10. Baleares Extraordinaria 2021. 6. Donats els punts

$$P=(1,0,1),\ Q=(1,1,0),\ \ i\ \ R=(0,1,1).$$

(a) Comprova que P, Q i R no estan alineats. (2 punts)
(b) Calcula l'equació vectorial del pla que determinen P, Q i R. (3 punts)
(c) Calcula l'área del triangle que té per vértexs P, Q i R. (3 punts)
(d) Calcula, de forma raonada, la condició que han de complir a, b i c perqué els punts P, Q, R i S = (a, b, c) pertanyin a un mateix pla. (2 punts)

Solución: (a) No están alineados (b) $\pi\equiv\begin{cases} x=1 \quad -\beta \\ y= \quad \alpha+\beta \\ z=1-\alpha \end{cases}$ *(c)* $\text{Área } PQR=\frac{\sqrt{3}}{2}u^2$ *(d)* $a+b+c-2=0$

11. Baleares Ordinaria 2021. 5. Considera els punts,

$$A=(5,a,7),\quad B=(3,-1,7),\quad C=(6,5,4)$$

(a) Determina el valor del parámetre *a* per al qual els punts A, B i C formen un triangle rectangle, amb l'angle recte al punt B. (3 punts)
(b) Per al valor de *a* = *–2*, calcula l'área del triangle de vértexs A, B i C. (3 punts)
(c) Per al valor de *a* = *5*, calcula l'angle format pels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 punts)

Solución: (a) a = –2 (b) $\text{Área}=\frac{3\sqrt{30}}{2}\simeq 8.21\,u^2$ *(c)* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\simeq 95^{\circ}$

12. Baleares Ordinaria 2021. 6. Donades les rectes

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}, \qquad s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 6+4\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases}.$$

(a) Calcula el valor de m per tal que es tallin en un punt, (7 punts)
(b) Calcula el punt de tall. (3 punts)

Solución: (a) m = 7 (b) El punto de corte de las rectas r y s es A(1, 14, 3)

13. Baleares Extraordinaria 2020. Opción A. 3. Donades les rectes

$$(I)\begin{cases} 15x+12y-14z = -17 \\ 8x-y-5z = 23 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} 9x+5y-2z = 5 \\ 24x-2y-13z = 67 \end{cases}$$

(a) Calcula un vector posició i un vector director de cada una. (4 punts)
(b) Calcula l'equaciò vectorial de cada una. (2 punts)
(c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferéncia, o vector resta, dels dos vectors posició obtinguts. (2 punts)
(d) De l'anterior rang, dedueix la posició relativa d'ambdues rectes. (2 punts)

Solución: (a) Los vectores y los puntos de cada recta son $\overrightarrow{u_I} = (2,1,3)$*;* $\overrightarrow{u_{II}} = (1,-1,2)$*;* $P_I(3,-4,1)$*;* $P_{II}(0,-1,-5)$ *(b)* $(I)\begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = -4+\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$ $(II)\begin{cases} x = \alpha \\ y = -1-\alpha \\ z = -5+2\alpha \end{cases}$ *(c) El rango es 2. (d) Las rectas son secantes.*

14. Baleares Extraordinaria 2020. Opción B. 3. Donats els plans

(I) $3x-ay+2z-(a-1)=0$; (II) $2x-5y+3z-1=0$; (III) $x+3y-(a-1)z=0$;

(a) Demostra que, per a qualsevol valor del parámetre a, no n'hi ha cap parell que siguin paral·lels. (4 punts)
(b) Estudia la seva posició relativa, segons els diferents valors del parámetre a. (6 punts)

Solución: (a) Los planos nunca pueden ser paralelos entre sí, pues plano (I) no es paralelo a (II), el plano (II) nunca es paralelo a (III) y tampoco es paralelo el (I) con el (III).
(b) Si $a \neq 2$ *y* $a \neq 5$ *los 3 planos coinciden en un punto. Si* $a = 2$ *coinciden en una recta. Si* $a = 5$ *definen rectas paralelas dos a dos.*

15. Baleares Ordinaria 2020. Opción A. 3. Considera el punt $P=(2,-1,1)$ i la recta r donada per

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+4z-1=0 \\ x+2y-3z-2=0 \end{array}\right\}(r)$$

(a) Calcula l'expressiò de l'equaciò contínua de la recta r. (2 punts)
(b) Calcula l'equaciò del pla, π, perpendicular a la recta r que passa pel punt P. (2 punts)
(c) Calcula el punt, Q, d'intersecciò del pla π amb la recta r. (3 punts)
(d) De totes les rectes que passen pel punt $P=(2,-1,1)$, calcula aquella que talla perpendicularment a la recta r. (3 punts)

Solución: (a) $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{10} = \frac{z+1}{7}$ *(b)* $\pi \equiv x+10y+7z+1=0$ *(c)* $Q\left(\frac{11}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right)$ *(d)* $s \equiv \left.\begin{array}{l} x = 2-9\lambda \\ y = -1+10\lambda \\ z = 1-13\lambda \end{array}\right\}$

16. Baleares Ordinaria 2020. Opción B. 3. Donada la recta r i el pla π

$$(r) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}, \quad (\pi) \quad 3x-my+z=1,$$

es demana si existeix algun valor del paràmetre m per al qual
(a) el pla i la recta sòn paral·lels. (4 punts)
(b) o bé, el pla conté la recta. (3 punts)
(c) o bé, el pla i la recta es tallen exactament en un punt. (3 punts)
En cada cas, si existeix, cacula'l.

Solución: (a) $m = \frac{5}{3}$ *(b) La recta nunca está contenida en el plano.*

(c) $m \neq \frac{5}{3} \cdot P\left(\frac{5-5m}{5-3m}, \frac{-5}{5-3m}, \frac{-10+7m}{5-3m}\right)$

17. Baleares Julio 2019. A. 3. Determinau un pla que, passant per l'origen de coordenades, sigui paral·lel a la recta d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{array}\right\}$$

i també paral·lel a la recta que passa pels punts de coordenades (1, 1, 0) i (0, 1, 1): (10 punts)

Solución: $\pi : x + 2y + z = 0$

18. Baleares Julio 2019. B. 3. Considerem els punts A(0, 0, 0), B(1, 1, 0) i C(0, 1, 1): Calculau l'_area del triangle que formen els punts A, B i C (5 punts) i determinau l'angle que formen els vectors AB i AC. (5 punts)

Solución: $Área = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$ y el ángulo es 60º.

19. Baleares Junio 2019. A. 3. Determinau la posició relativa del pla $x + y + z = 1$ amb la recta d'equacions $x - 1 = y - 1 = \frac{z-1}{-2}$ (4 punts)
Calculau la projecció ortogonal de la recta sobre el pla. (6 punts)

Solución: Recta y plano son paralelos. La proyección es la recta $x - \frac{1}{3} = y - \frac{1}{3} = \frac{z - \frac{1}{3}}{-2}$

20. Baleares Junio 2019. B. 3. Considerem la recta $\frac{x-1}{2} = y + 1 = -z + 1$ i el pla $x - y = 0$. Calculau l'àrea del triangle format pel punt de tall entre la recta i el pla, el punt (1, –1, 1) de la recta i la projecció ortogonal d'aquest punt sobre el pla. (10 punts)

Solución: $Área = \sqrt{11}\, u^2$

21. Baleares Julio 2018. A. 3. Calculau les equacions parametriques de la recta que passa per l'origen de coordenades i talla les rectes: (10 punts)
$r: x = 2y = z - 1 \qquad s: 3x = 2y - 2 = 6z$

Solución: $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

22. Baleares Julio 2018. B. 3. Calculau la distancia entre les rectes seguents: (10 punts)

$$r: \begin{cases} x + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Solución: $d(r,s)=1u$

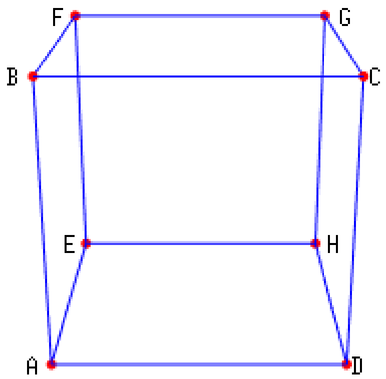
23. Baleares Junio 2018. A. 3. Determinau els punts A, B i C de la recta $x-12=\frac{y+6}{2}=\frac{z-6}{3}$ que estan als plans coordenats (6 punts) i determinau quin d'aquests tres punts, A, B, C, está situat entre els altres dos. (4 punts)

Solución: A(0,–30,–30), B(15,0,15) y C(10,–10,0). C está entre A y B.

24. Baleares Junio 2018. B. 3. El pla perpendicular al punt mig del segment d'extrems P(0,3,8) i Q(2,1,6) talla als eixos coordenats en els punts A, B i C. Trobau l'_area del triangle ABC. (10 punts).

Solución: Área = $32\sqrt{3}\simeq 55.4256\,u^2$

25. Baleares Septiembre 2017. A. 3. Considerem el cub que apareix a la figura adjunta. Suposem que el punt C té coordenades (1,1,1), les arestes del cub són paral·leles als eixos coordenats (o sigui, l'aresta AE és paral·lela a l'eix X, l'aresta AD, a l'eix Y i l'aresta AB, a l'eix Z) i els costats del cub tenen llargada 2. Calculau el pla que passa pels punts A, E, C i G (7 punts) i la recta perpendicular al pla anterior que passa pel punt D. (3 punts)



Solución: El plano tiene ecuación $y-z=0$. *La recta tiene ecuación* $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$

26. Baleares Septiembre 2017. B. 3. Donats els punts A(1,0,3) i B(1,3,4), determinau els punts situats en el pla z = 1 que formin amb els punts A i B un triangle equiláter. (6 punts) Calculau el volum del tetraedre format pels 3 punts anteriors i l'origen de coordenades. (4 punts)

Solución: Hay dos soluciones: $Volumen=\frac{1}{6}\left(\frac{25}{3}+3\sqrt{5}\right)$ ó $Volumen=\frac{1}{6}\left(\frac{25}{3}-3\sqrt{5}\right)$

27. Baleares Junio 2017. A. 3. Donades les rectes $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ y $s:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-2}$

a) demostrau que es creuen. (4 punts)

b) calculau la distáncia entre les rectes. (6 punts)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com *b)* $d(r,s)=5\sqrt{\frac{2}{13}}\approx 1.96116\,u$

28. Baleares Junio 2017. B. 3. Considerem les rectes següents dependents d'un parámetre λ:

$$r:\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda t \\ y=-1+t \\ z=3-2t \end{array}\right\},\quad s:\frac{x-2}{\lambda}=\frac{y}{2\lambda}=\frac{z-3}{-1}$$

a) Calculau el valor de λ perqué *r* i *s* es tallin. (7 punts)
b) Calculau el punt d'intersecció pe al valor de λ calculat. (3 punts)

Solución: a) $\lambda = \dfrac{1}{3}$ *b) El punto tiene coordenadas (0,–4,9)*

Canarias

1. Canarias EBAU Extraordinaria 2023. 3A. En el espacio tridimensional tenemos un punto y la recta siguientes:

$$P(1,-2,0) \quad ; \quad r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P. 1.75 ptos

Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r.

b) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s: x-5=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-9}{3}$ 0.75 ptos

Solución: a) $\pi: x-2y-5=0$. *El ángulo que forma el plano con la recta es de 15º.*

b) El punto de corte de las rectas r y s es A(3, 3, 3).

2. Canarias EBAU Extraordinaria 2023. 3B.

En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} 8x+2y-3z+12=0 \\ -7x-y+3z=9 \end{cases} \quad ; \quad s: x=y+1=\frac{z-2}{2}$$

a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 ptos

b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. 1.25 ptos

Solución: a) Las rectas se cortan y son coplanarias. $\pi: 2x-z+2=0$ *b)* $t:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+5\lambda, \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

3. Canarias EBAU Ordinaria 2023. 3A. En el espacio tridimensional consideremos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi: 2x+3y-z=4 \quad ; \quad r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases} \quad ; \quad s:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1}$$

a) Calcular el punto simétrico de P(–2,1,2) respecto de π. 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo que forman r y s. 1.25 ptos

Solución: a) $P' = (0,4,1)$ *b) Las rectas forman un ángulo de 30º.*

4. Canarias EBAU Ordinaria 2023. 3B. En el espacio tridimensional conocemos las siguientes ecuaciones de rectas:

$$r:\begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x+3y-12z+1=0 \end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases} 2x-7y-3z=22 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de r y s. 1.25 ptos

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. 1.25 ptos

Solución: a) Las rectas r y s se cruzan. Tienen distinta dirección y no son coplanarias. b) $\pi: 3x-5y+z+11=0$

5. Canarias EBAU Extraordinaria 2022. 3A.
Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

a) Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$, estudia la posición relativa entre r y s 1.5 ptos

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z-5=0$ 1 pto

Solución: a) Se cortan (son coplanarias) b) $\pi': 2x+5y+z+6=0$

6. Canarias EBAU Extraordinaria 2022. 3B.
En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} -3x+2y=5 \\ -4y+3z+7=0 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv 5x-6y+7z+58=0$$

a) Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A, dar la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A 1.5 ptos

b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π 1 pto

Solución: a) $s:\begin{cases} x=-5+5\alpha \\ y=-5-6\alpha \\ z=-9+7\alpha \end{cases}$ *b) 21º.*

7. Canarias EBAU Ordinaria 2022. 3A. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 4y-3z=-1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x+4y+12=0 \\ 6y+z+13=0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s 1.25 ptos

b) Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r. Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta: $t \equiv \frac{x+4}{-1}=\frac{y-8}{3}=z-2$ 1.25 ptos

Solución: a) Las rectas se cruzan b) $\pi \equiv -11x-2y+7z-6=0$

8. Canarias EBAU Ordinaria 2022. 3B. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x=1+t+4s \\ y=1+s \\ z=3-2t-5s \end{cases}; \quad r_1 \equiv \frac{x+4}{5}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-1}{0}; \qquad r_2 \equiv \begin{cases} 4x+3y=7 \\ y+4z=5 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 1.25 ptos

b) ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45º? Justifícalo 1.25 ptos

Solución: a) $s \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1-3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$ *b) No es cierto. El ángulo es de casi 77º*

9. Canarias Extraordinaria 2021. 3A. Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r: 5-x = y-3 = 5-z$$

$$\pi: 3x-4y-8z+35=0$$

a) Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto. Averiguar dicho punto. 1.5 ptos

b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto A (2,2,2), paralelo a la recta r, y perpendicular al plano π 1 pto

Solución: a) Recta y plano se cortan en el punto $P(3,5,3)$ *b)* $\pi' \equiv -12x-11y+z+44=0$

10. Canarias Extraordinaria 2021. 3B. Dado el plano $\pi: -x+3y+2z+5=0$

Y las rectas secantes $r: \dfrac{x-5}{2} = y+2 = 1-z$ y $s: \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y}{-2} = z$

a) Sea A el punto de intersección de las rectas r y s. 1.5 ptos

Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y que pasa por A.

b) Calcular el ángulo que forman las rectas r y s. 1 pto

Solución: a) $A(5,-2,1)$. $t: \begin{cases} x = 5-\beta \\ y = -2+3\beta \\ z = 1+2\beta \end{cases}$ *b)* $\text{ángulo}(r,s) = \arccos\left(\dfrac{3\sqrt{246}}{82}\right) \simeq 54^{\circ}$

11. Canarias Ordinaria 2021. 3A. Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional:

$A(0,-2,3)$, B $(1,-1,4)$, C $(2,3,3)$ y $D(4,5,5)$

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios.

A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene. 1.5 ptos

b) Calcular la ecuación de la recta r, perpendicular al plano $\pi: \begin{cases} x = 1+2\lambda+3\mu \\ y = -2+\lambda \\ z = 1-3\lambda-3\mu \end{cases}$ 1 pto

que pasa por el punto A.

Solución: a) $\pi: -5x+2y+3z-5=0$ *b)* $r: \begin{cases} x = -3t \\ y = -2-3t \\ z = 3-3t \end{cases}$*, siendo* $t \in \mathbb{R}$

12. Canarias Ordinaria 2021. 3B. Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1: 2x+3y-z=9 \quad y \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = -2-\lambda+2\mu \\ z = 3+3\lambda-\mu \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$ 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 1.25 ptos

Solución: a) $r: \begin{cases} x = 13\lambda \\ y = -2-\lambda \\ z = 1+23\lambda \end{cases}$*, siendo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *b) El ángulo que forman los planos* π_1 *y* π_2 *es de 92.16º*

13. Canarias Extraordinaria 2020. Grupo A. 3. Dada la recta $r:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$, y dado el plano $\pi \equiv x-3y+5z=2$

a. ¿Cuál es la posición relativa de la recta *r* y el plano π. 1.25 ptos

b. Calcular el plano π´ que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π. 1.25 ptos

Solución: a. Recta y plano son paralelos. b. $\pi' \equiv -8x-11y-5z+32=0$.

14. Canarias Extraordinaria 2020. Grupo B. 3. Consideremos el punto *A(1,2,1)*, y la recta $r:\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases}$

a. Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto *A* y es perpendicular a la recta *r*. 1.5 ptos

b. Consideremos *P(1,4,2)*, un punto de la recta *r*. Y sea *s* la recta determinada por los puntos *A* y *P*. Calcule el ángulo que forman las rectas *r* y *s*. 1 pto

Solución: a. $\pi \equiv x-y+3z-2=0$ *b. 82 grados, aproximadamente.*

15. Canarias Ordinaria 2020. Grupo A. 3. Dadas las rectas siguientes

$r:\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}, \quad s:\begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

a. Estudie la posición relativa de *r* y *s*. 1,5 ptos

b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta *r*, y que contiene el punto *A(11, –2, 5)* 1 pto

Solución: a. Las rectas se cruzan. b. $-2x+y-z+29=0$

16. Canarias Ordinaria 2020. Grupo B. 3. Consideremos la recta $r:\begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x-4z=-1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x-y+3z=12$

a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π_1. 1.25 ptos

b. Sabiendo que la recta *r* corta el plano π_1 averigüe el punto de intersección. 1.25 ptos

Solución: a. $\pi_2 \equiv 9x-3y-4z-14=0$ *b. El punto intersección de recta y plano es* $(5,5,4)$

17. Canarias Julio 2019. A.3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x-3y+z=0$ y $\pi_2 \equiv 2x-y+3z=5$

- pasa por el punto (2, –1, 5) (2,5 ptos)

Solución: $r \equiv \begin{cases} x=2-8t \\ y=-1-t \\ z=5+5t \end{cases}$

18. Canarias Julio 2019. B.3. Hallar el ángulo que forman el plano $\pi \equiv 2x-y+z=0$ y el plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1 \quad \text{(2,5 ptos)}$$

Solución: 33,5º

19. Canarias Junio 2019. A.3. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 0$, calcular:

a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2,2,3)$ (1,5 ptos)

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 (1 pto)

Solución: a) $s \equiv x - 2 = y - 2 = \frac{z-3}{3}$ *b) 16,8º.*

20. Canarias Junio 2019. B.3. Se consideran los puntos $A(2,-1,1)$ y $B(-2,3,1)$ que determinan la recta r

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4,17,0)$ (1,25 ptos)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos. (1.25 ptos)

Solución: a) $s \equiv \left. \begin{array}{l} x = -4 - 6t \\ y = 17 - 6t \\ z = t \end{array} \right\}$ *b)* $\pi : -x + y - 1 = 0$

21. Canarias Julio 2018. A. 3. Estudiar la posición relativa de los planos

$\alpha : 2x + 3y - 5z + 7 = 0$

$\beta : 3x + 2y + 3z - 1 = 0$ (2,5 puntos)

$\gamma : 7x + 8y - 7z + 13 = 0$

Solución: Los tres planos se cortan en una recta.

22. Canarias Julio 2018. B. 3. Dadas las rectas $r_1 \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ *y* $r_2 \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$, se pide

a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias. (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que determinan. (1,25 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $\pi : x + 5y + 2z - 2 = 0$

23. Canarias Junio 2018. A. 3. a) Halle la ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(-1,5,0)$ y $B(0,1,1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ (1,5 ptos)

b) Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (1 pto)

Solución: a) $\pi \equiv 11x + 4y + 5z - 9 = 0$ *b)* $r \equiv \frac{x + \frac{1}{2}}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z - \frac{1}{2}}{2}$

24. Canarias Junio 2018. B. 3. Dados los planos: $\pi_1 \equiv x + y + z - 5 = 0$ *y* $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$

a) Comprobar que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica. (1,75 ptos)
b) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2 (0.75 ptos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com $\begin{cases} x=4-\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}$ *b)* $\pi_3 \equiv x-y=0$

25. Canarias Julio 2017. A. 4. Dado el plano $\pi: 2x+y-z=0$ y la recta $r:\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ se pide

a) Escribir la ecuación de la recta *r* en forma continua (1,25 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,2,1), es paralelo a la recta *r* y perpendicular al plano π. (1,25 puntos)

Solución: a) $r: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-4}{-3}$ *b)* $\pi' \equiv x-y+z=0$

26. Canarias Julio 2017. B. 4. Dados la recta $r: x=y+1=\dfrac{z-\frac{11}{m}}{\frac{-3}{m}}$ y el plano $\pi: 2x+y+z=9$ se pide

a) Calcular el valor del parámetro *m* para que la recta *r* sea paralela al plano π (1,25 puntos)
b) Para *m* = 2, determinar el punto de intersección de la recta *r* y el plano π (1,25 puntos)

Solución: a) m = 1 b) El punto es $A(3,2,1)$

27. Canarias Junio 2017. A. 4. Dado el plano $\pi: 5x+ay+4z-5=0$ y la recta $r: \frac{x}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-2}{-4}$, se pide

a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta *r* sea paralela al plano π (1,25 puntos)
b) Para $a = 0$, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta *r* (1,25 puntos)

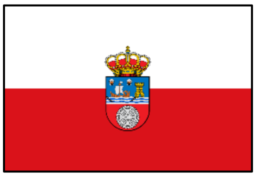
Solución: a) a = 1 b) $\alpha = 7^{\circ}$

28. Canarias Junio 2017. B. 4. Dados los planos: $\pi_1: x-y+3=0$; $\pi_2: 2x+y-z=0$, determinar

a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto P(2,2,1). (1 punto)
b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto A(1,1,−1) (1,5 puntos)

Solución: a) $r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1 \end{cases}$ *b)* $\pi_3: x+y+3z+1=0$

Cantabria



1. Cantabria Extraordinaria 2023. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

A) [1,5 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por el punto (2, -1, 0). Es decir, de aquellas que tienen vector director $(v_1,\ v_2,\ v_3)$, donde $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}$ son parámetros.

B) [1 PUNTO] De las rectas anteriores, escriba las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene vector director (-1, 4, 1).

Solución: A. $r:\begin{cases} x = 2 + v_1\beta \\ y = -1 + v_2\beta,\ \beta \in \mathbb{R} \\ z = v_3\beta \end{cases}$ *B.* $r:\begin{cases} x = 2 - \beta \\ y = -1 + 4\beta,\ \beta \in \mathbb{R} \\ z = \beta \end{cases}$

2. Cantabria Extraordinaria 2023. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considere el par de rectas

$$r:\begin{cases} 3x - 5 = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

A) [1 PUNTO] Calcule la posición relativa de las dos rectas.
B) [0,5 PUNTOS] De la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
C) [1 PUNTO] De la ecuación de un plano ortogonal a la recta *r*.

Solución: A. Las rectas r y s son paralelas. B. z = 0.
C. Existen infinitos planos. Uno de ellos es $\pi: x + 3y - 15 = 0$

3. Cantabria Ordinaria 2023. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos $A = (0,0,1),\ B = (4,1,2)\ y\ C = (3,4,3)$.

Solución: Recta que pasa por A y B → $r:\begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 1 + \lambda \quad ,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$. *Recta que pasa por A y C →* $s:\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 4\alpha \quad ,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2a \end{cases}$. *Recta que pasa por B y C →* $t:\begin{cases} x = 4 - \beta \\ y = 1 + 3\beta,\ \beta \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \beta \end{cases}$

4. Cantabria Ordinaria 2023. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considere los planos

$$\pi_1: 2x - 3y + 5z = a$$
$$\pi_2: bx + 3y - 5z = 4$$

en función de los parámetros *a*, *b* ∈ R. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros *a* y *b* para que los planos π_1 y π_2:

1) [0,5 PUNTOS] Sean coincidentes. En caso afirmativo de un valor para *a* y *b*.
2) [1 PUNTO] Sean paralelos. En caso afirmativo de un valor para *a* y *b*.
3) [1 PUNTO] Se corten en una recta. En caso afirmativo de un valor para *a* y *b*.

Solución: 1) $a=-4;\ b=-2$ *2)* $a\neq -4;\ b=-2$ *3)* $b\neq -2$ *y "a" cualquier valor.*

5. Cantabria Extraordinaria 2022. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]
Los puntos A = (0,–1,1), B = (1,1,1) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice está contenido en la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano $\pi = 2x-y+z=1$.
A. [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación de la recta *r*.
B. [1 PUNTO] Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución: A. $r:\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$ *B. Tiene dos soluciones:* $C(13,-5,7)$ *y* $C'(-11,7,-5)$

6. Cantabria Extraordinaria 2022. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Considera la recta $r:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.
A. [1 PUNTO] Estudie la posición relativa de recta y plano.
B. [1,5 PUNTOS] Si *r* corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ambos.

Solución: A. La recta y el plano se cortan en un punto. B. Punto de corte P(–2,–1,1). Ángulo = 90º

7. Cantabria Ordinaria 2022. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]
Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértices A = (–1,2,3), B = (3,–4,1), C = (1,–4,5).
A. [1,5 PUNTOS] Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.
B. [1 PUNTO] Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución: A. $m_A:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=3 \end{cases};\ m_B:\begin{cases} x=3-\alpha \\ y=-4+\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases};\ m_C:\begin{cases} x=1 \\ y=-4+\beta \\ z=5-\beta \end{cases}.$ *B. P(1, –2, 3)*

8. Cantabria Ordinaria 2022. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Los puntos A = (2, 0, 0), B = (–1, 12, 4) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r=\begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$
A. [1,5 PUNTOS] Calcule las coordenadas del tercer vértice C, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C.
B. [0,5 PUNTOS] Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$
C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área del triángulo ABC.

Solución: A. C(6, 0, 3) B. 90ª C. 32.5 u^2.

9. Cantabria Extraordinaria 2021. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]
Considera los puntos *A* = (1, 1, 0), *B* = (0, 1, 1), *C* = (−1, 0, 1) y el origen de coordenadas *O*.

1) [0.75 PUNTOS] Calcula la ecuación del plano, Π, que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

2) [0.25 PUNTOS] Comprueba que el origen de coordenadas, *O*, está contenido en el plano Π.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{AO}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área del paralelogramo *ABCO*.

Solución:1) $\Pi \equiv x - y + z = 0$ *2) Si. 3) Son iguales los vectores* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{OC}$. *Son iguales los vectores* $\overrightarrow{AO}$ *y* $\overrightarrow{BC}$. *4) Área* $ABCO = \sqrt{3}\,u^2$

10. Cantabria Extraordinaria 2021. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r = \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta, r', que pase por A y B

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de las rectas r y r'.

3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y el origen de coordenadas.

Solución:1) $r' \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 5 - 4\alpha \end{cases}$ *2) Las rectas r y r´ se cortan en el punto B. 3)* $\text{Área } ABO = \dfrac{\sqrt{555}}{2} \simeq 11.77\,u^2$

11. Cantabria Ordinaria 2021. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se dispara un misil en línea recta desde el punto A = (1, 2, 8) hacia la posición de la base enemiga B = (3, 4, 0).

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.

4) [1 PUNTO] Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Solución:1) $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -8t \end{cases}$ *2) El misil cruza el plano en el punto P(2,3,4). 3)* $\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{72} = 8.485\,u$

4) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{OB}$ *y* $\overrightarrow{AB}$ *es* $\vec{u} = (-32, 24, -2)$

12. Cantabria Ordinaria 2021. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera el plano $\Pi = 2x + 3y - 4z = 10$ y los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 3)$.

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

2) [0.25 PUNTOS] Halla el vector normal del plano Π.

3) [0.75 PUNTOS] Determina la posición relativa del plano Π, y la recta que pasa por los puntos A y B.

4) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano paralelo a Π que contiene al punto A.

Solución:1) $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ *2)* $\vec{n} = (2, 3, -4)$ *3) La recta r y el plano Π son secantes, coinciden en un punto.*

4) $\Pi' \equiv 2x + 3y - 4z = 4$

13. Cantabria Extraordinaria 2020. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos A = (2, 1, 5), B = (3, 4, 1) y la recta $r\begin{cases}x=3-\lambda\\y=4-3\lambda\\z=1-4\lambda\end{cases}$

1) [0.5 PUNTOS] Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.
2) [1 PUNTO] Calcula la ecuación de una recta que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta *r*.
3) [1 PUNTO] Calcula la ecuación del plano que contiene al rayo y a la recta *r*.

Solución:1) $s\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\y=1+3\lambda\\z=5-4\lambda\end{cases}$ *2)* $t\equiv\begin{cases}x=3+3\alpha\\y=4-\alpha\\z=1\end{cases}$ *3)* $\pi\equiv 3x-y-5=0$

14. Cantabria Extraordinaria 2020. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Considera los puntos $A=(1,3,1)$, $B=(4,1,-2)$, $C=(3,5,2)$, $D=(1,1,3)$.
1) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano π que contiene a los puntos *A*, *B*, *C*.
2) [0.5 PUNTOS] Comprueba si el punto D está contenido en el plano π.
3) [1 PUNTO] Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución: 1) $\pi\equiv 4x-9y+10z+13=0$ *2) El punto D no pertenece al plano π. 3)* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\approx 94^{o}$

15. Cantabria Ordinaria 2020. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]
Se emite un rayo láser desde el punto $P=(1,2,8)$ en la dirección del vector $\vec{v}=(1,2,-3)$. El plano $-x-y+3z=-8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.
1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.
2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de rayo y lámina.
3) [1 PUNTO] Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Solución: 1) $r:\left.\begin{matrix}x=1+\lambda\\y=2+2\lambda\\z=8-3\lambda\end{matrix}\right\}$ *2) Se cortan en un punto. 3)* $\pi'\equiv x+2y-3z=0$

16. Cantabria Ordinaria 2020. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,-4)$, $C(4,3,2)$.
1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A* y *B*.
2) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.
3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Solución: 1) $r\equiv\left.\begin{matrix}x=1+\lambda\\y=2+\lambda\\z=1-5\lambda\end{matrix}\right\}$ *2)* $\pi\equiv 3x-8y-z+14=0$ *3)* $Área=\sqrt{74}=8{,}6\,u^2$

17. Cantabria Julio 2019. Opción 1. Ejercicio 3. Sea el plano $\Pi\equiv(2,1,0)+t\overrightarrow{(2,1,0)}+s\overrightarrow{(0,1,-1)}$ y el punto A = (2, 1, 3).
1) [1.5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y Π.
2) [1 PUNTOS] Calcule la recta ortogonal (perpendicular) a Π que contiene al punto A.

Solución: 1) $d(A,\pi)=\frac{1}{\sqrt{6}}u$ *2)* $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-1}$

18. Cantabria Julio 2019. Opción 2. Ejercicio 3. Sean los puntos P=(0,1,0), Q=(−1,1,2), R=(2,0,−1) y el plano $\Pi \equiv \begin{cases} x = 2+4t \\ y = -5t+s \\ z = -1 + 4s \end{cases}$

1) [2.25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por el plano que contiene a P, Q y R y el plano Π.
2) [0.25 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y Q.

Solución: 1) 45,74º 2) $d(P,Q) = 2,24\,u$

19. Cantabria Junio 2019. Opción 1. Ejercicio 3. Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x+ay+z=2$ y la recta $r(t) \equiv (0,0,0)+t\overrightarrow{(2,1,1)}$.

1) [0.5 PUNTOS] Determine *a* para que *r* y Π sean ortogonales.
2) [2 PUNTOS] Determine *a* para que *r* y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre *r* y Π en este caso.

Solución: 1) $a=1$ *b)* a = –5. $d(r,\Pi) = \frac{2}{\sqrt{30}}\,u$

20. Cantabria Junio 2019. Opción 2. Ejercicio 3.
Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y=2 \\ 2x+z=13 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x+2y=4 \\ x-z=3 \end{cases}$ y el punto *A* = (0, 0, 3).

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por *A* y es paralelo a r_1 y a r_2.

Solución: $x+3y+2z-6=0$

21. Cantabria Septiembre 2018. Opción 1. Ejercicio 3 Sean *A* y *B* los planos:

$$A:(0,1,0)+t\overrightarrow{(1,-1,2)}+s\overrightarrow{(0,0,1)}\ t,s\in\mathbb{R}$$
$$B: x+2y+2z=1$$

1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano *A*.
2) [1 PUNTO] Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de *A* y *B*.
3) [1,25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por los dos planos *A* y *B*.

Solución: 1) $A: x+y-1=0$ *2)* $P_r(1,0,0);\ \overrightarrow{v_r}=(2,-2,1)$ *3)* $\acute{a}ngulo(A,B)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45^{\circ}$

22. Cantabria Septiembre 2018. Opción 2. Ejercicio 3 Sean el punto A = (4, 0, 1) y la recta $r:\begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$

1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a *r* que pasa por el punto A.
2) [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que contiene a *r* y a A.

Solución: 1) $Plano: y+z-1=0$ *2)* $\pi \equiv 3x+2y-2z-10=0$

23. Cantabria Junio 2018. Opción 1. Ejercicio 3 Tomemos la recta $r:\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ y el plano $\Pi: 3x-y=2$.

1) [1 PUNTO] Demuestre que r y Π son paralelos.
2) [1 PUNTO] Calcule una recta paralela a r contenida en Π .
3) [1 PUNTO] Calcule la distancia de r a Π.
4) [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es el vector director de la recta $s:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+4}{2}$?

Solución: 1) www.ebaumatematicas.com 2) $s:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{2}$ *3)* $\text{distancia}(r,\Pi)=\frac{1}{\sqrt{10}}=0,31\,u$ *4)* $\vec{v_s}=(3,2,2)$

24. Cantabria Junio 2018. Opción 2. Ejercicio 3 Sean r y s las rectas

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=-2+3t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \qquad s:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$$

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de r y s.
2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre r y s.
3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a s que pasa por (0, 1, 0).

Solución:1) Las rectas se cruzan 2) $\text{Distancia}(r,s)=\frac{6}{\sqrt{166}}=0,465\,u$ *3)* $\pi: 3x+y-2z-1=0$

25. Cantabria Septiembre 2017. Opción 1. Ejercicio 3
Sean $P: x+3y+2z-1=0$ y $Q: 2x+6y+4z+3=0$ dos planos

1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano P de su ecuación implícita (general).
2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano P.
3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos P y Q.
4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a Q que pase por el punto (0, 0, 0).

Solución: 1) $\vec{n}=(1,3,2)$ *2)* $P:\begin{cases} x=1-3\lambda-2\alpha \\ y=\lambda \\ z=\alpha \end{cases}$ *3) Los planos son paralelos 4)* $r:\frac{x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{z}{4}$

26. Cantabria Septiembre 2017. Opción 2. Ejercicio 3
Sea Q el plano de ecuación $Q:(0,0,1)+s\overrightarrow{(2,-1,0)}+t\overrightarrow{(2,-1,1)}$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule la ecuación implícita (general) del plano Q.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule la recta que pasa por (–1,2,4) que sea perpendicular al plano Q.
3) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia del punto (–1,2,4) al plano Q.

Solución: 1) $Q: x+2y=0$ *2)* $r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=4 \end{cases}$ *3)* $d((-1,2,4),Q)=\frac{3\sqrt{5}}{5}u$

27. Cantabria Junio 2017. Opción 1. Ejercicio 3
Sea P el punto (0, 2, 2). Sea r la recta expresada de forma continua:

$$r:\frac{x-2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$$

1) [0,75 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta r.
2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de P a r.

3) [1 PUNTO] Calcule un plano perpendicular a *r* que pase por el punto *P*.

Solución: 1) $r:\begin{cases} x=2+4\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$ *2)* $d\left(P,r\right)=\sqrt{17}=4{,}12\,u$ *3)* $\pi:4x+y+2z-6=0$

28. Cantabria Junio 2017. Opción 2. Ejercicio 3

Sean A = (−2, 1, 0), B = (1, 1, 1), C = (2, 0, 2) tres puntos de $\mathbb{R}^3$.

1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A, B y C.

2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta $\overline{BC}$.

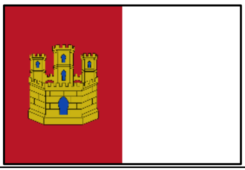
3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por ABC.

4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $u=\overrightarrow{\left(3,\ 0,\ 1\right)}$ y $v=\overrightarrow{\left(4,\ -1,\ 2\right)}$ son ortogonales.

Solución: 1) $\pi\equiv x-2y-3z+4=0$ *2)* $r\equiv\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ *3)* *Área ABC* $=\dfrac{\sqrt{14}}{2}=1{,}871\,u^2$

4) No son ortogonales.

Castilla la Mancha



1. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2023. 4. Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(b, 1, -1)$, con $b \in \mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** Determina el valor de *a*, *b* para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto *A* esté contenido en el plano π.

b) **[1 puntos]** Con los valores de *a*, *b* obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por *A* y es perpendicular al plano π.

Solución: a) Los valores buscados son a = 1 y b = 2. b) $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

2. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2023. 6. b) [1,5 puntos] Sean el punto $A(1, 2, 1)$ y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto *A* al plano π.

Solución: $d(A, \pi) = \sqrt{2}$ *unidades*

3. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2023. 8. b) [1,25 puntos] Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$.

Solución: El valor aproximado del ángulo formado por los dos vectores es de 10º.

4. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2023. 3. Sea el punto *A(1, 1, a)* y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** ¿Qué deben cumplir los valores *a*, *b* para que el punto *A* esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1,2,0)$?

b) **[1 punto]** Con los valores de *a*, *b* del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto *A*.

Solución: a) Los valores buscados son a = 2 y b = –2. b) $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

5. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2023. 6. b) [1.5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2,2,0)$ y $\vec{v} = (0,0,-1)$.

Solución: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

6. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2023. 8. b) [1,25 puntos] Sea la recta *r* definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$, $\pi_2 \equiv y + 2z = 1$. Por otro lado, consideraremos el plano

$\pi_3 \equiv 2x+y=1$. Determina la posición relativa de la recta *r* y el plano π_3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

Solución: La recta r está contenida en el plano π_3.

7. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2022. 4. Sea el punto A = (1, 0, 1) y el plano $\pi \equiv x+y+z=8$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula la recta perpendicular a *π* y que pasa por *A*. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

b) **[1 punto]** Obtén el punto de la recta anterior distinto de *A* que dista de *π* igual que *A*, es decir, el punto simétrico de *A* con respecto a *π*.

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ *. El punto de corte es P(3, 2, 3) b)* $A' = (5,4,5)$

8. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2022. 5. a) **[1 punto]** Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a *π* y que contiene a *A* y *B*.

Solución: $\pi' \equiv -7x - y + 4z + 4 = 0$

9. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2022. 6. a) **[1,5 puntos]** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de *a* para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

Solución: a) Los valores buscados son $a = \frac{-5}{2}$ *y* $a = \frac{7}{2}$.

10. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022. 4. Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=a \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x=-1 \\ y=\mu \\ z=-5\mu \end{cases}$$

donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$

a) **[1,5 puntos]** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma *a*.

b) **[1 punto]** Encuentra razonadamente un plano que contenga a *s* y que sea paralelo a *r*.

Solución: a) Si $a = \frac{-5}{2}$ *las rectas se cortan y si* $a \neq \frac{-5}{2}$ *las rectas se cruzan. b)* $\pi: 5x+10y+2z+5=0$

11. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022. 5. a) **[1 punto]** Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y+1$ y $\pi_2 \equiv y+2z=5$.

Solución: $r: \begin{cases} x=6-2\lambda \\ y=5-2\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$

12. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022. 6. b) **[1 punto]** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x+my=1$, $\pi_2 \equiv 2x+y=m$ y $\pi_3 \equiv 4x+y+mz=2$. Estudia su posición relativa según los valores de *m*. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Solución: Si $m \neq 0$ *y* $m \neq 1$ *los planos coinciden en un punto. Si m = 0 los planos no coinciden. Si m = 1 los planos 1º y 2º son coincidentes y se cortan con el 3º en una recta.*

13. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022. 7. a) **[1,25 puntos]** Sean los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{v}=(1,0,1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A=(0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución: $\pi : x-z+1=0$

14. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2021. 4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a\cdot x+y+2\cdot z=3$ **y** $\pi_2 \equiv 2\cdot x-y+a\cdot z=0$

a) **[1 punto]** Determina razonadamente el valor de *a* para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) **[1,5 puntos]** Para *a = 1* calcula la distancia del punto P(2, 0, 1) al plano π_1.

Solución: a) $a=\frac{1}{4}$ *b)* $d(P,\pi_1)=\frac{1}{\sqrt{6}}\simeq 0.408\,u$

15. Castilla la Mancha Ordinaria 2021. 4. a) **[1,25 puntos]** Sea el punto P(1, 0, 1) y la recta $r\equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta *r*.

b) **[1,25 puntos]** Sean las rectas $s\equiv\begin{cases}x=0+2\lambda\\ y=1-2\cdot a\cdot\lambda\\ z=0+2\lambda\end{cases}$ y $t\equiv\frac{x-1}{a}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

Solución: a) $d(P,r)=\frac{\sqrt{24}}{3}\simeq 1.63\,u$ *b) a = 1*

16. Castilla la Mancha Ordinaria 2021. 5. Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

Solución: *Volumen ABCD* $=\frac{1}{6}u^3$ $\pi\equiv x-y+z-1=0$ $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$

17. Castilla la Mancha Extraordinaria 2020. 6. Sea el plano $\pi\equiv x+2y-z-4=0$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x-2y-2=0\\ y-z-2=0\end{cases}$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1,2,-1)$ al plano π.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta *r* con el plano π, y los puntos $B(1,-1,2)$ y $C(0,1,1)$.

Solución: a) $d(P,\pi)=\frac{2}{\sqrt{6}}=0{,}816\,u$ *b)* $\acute{A}rea=\frac{\sqrt{83}}{2}=4{,}55\,u^2$

18. Castilla la Mancha Extraordinaria 2020. 7. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x-2y=4 \\ z=0 \end{cases}$,

$s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1,0,2)$.

a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto *P* y es paralelo a las rectas *r* y *s*.

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $\pi \equiv x-y-5z+11=0$

19. Castilla la Mancha Ordinaria 2020. 6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+y+z-2=0$ y

$\pi_2 \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda-\mu \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3,-3,2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

Solución: a) 30º b) $Volumen = 1u^3$

20. Castilla la Mancha Ordinaria 2020. 7. Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x=-1+\mu \\ y=1+\lambda+a\mu \\ z=1+2\lambda-\mu \end{cases}$ y la recta

$s \equiv \begin{cases} x-2y=1-b \\ z=-3 \end{cases}$

a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros *a* y *b* para que la recta *s* esté contenida en el plano π.

b) **[1 punto]** Si $a=0$ y $b=3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta *r* que pasa por el punto $P(1,-1,-8)$ es paralela al plano π y es perpendicular a la recta *s*.

Solución: a) a = b = 0 b) $\left.\begin{array}{r} x=1+\lambda \\ r \equiv y=-1-2\lambda \\ z=-8-5\lambda \end{array}\right\}$

21. Castilla la Mancha Julio 2019. 4A.

Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=\lambda-\mu \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π. (1,25 puntos)

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r. (1,25 puntos)

Solución: a) Recta y plano son secantes, coincidiendo en un punto. b) $\pi' \equiv 3x-y+2z-3=0$

22. Castilla la Mancha Julio 2019. 4B. a) Dados los vectores $\vec{u}=(-1,\ 0,-2)$, $\vec{v}=(a,b,1)$ y $\vec{w}=(2,5,c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1,5 puntos)

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto

P(–1,3,1) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+2z-3=0$. Comprueba si los puntos Q(1, 5, 5) y R(0, 4, 2) pertenecen o no a la recta. (1 punto)

Solución: a) $a=-2; b=1$ *y* $c=-1$ *b)* $r\equiv\begin{cases}x=-1+t\\ y=3+t\\ z=1+2t\end{cases}$ *o bien* $r\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$. *Q si pertenece, pero R no pertenece a la recta.*

23. Castilla la Mancha Junio 2019. 4A. Dados los puntos A(1, 2, 0), B(0, –1, 2), C(2. –1, 3) y D(1, 0, 1) :

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. (1,25 puntos)

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. (1,25 puntos)

Solución: a) $x-y-z-1=0$ *b)* Volumen del tetraedro ABCD $=\frac{2}{3}u^3$

24. Castilla la Mancha Junio 2019. 4B.

Sean la recta $r\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$, el punto P(3, 1, –1) y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$.

a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. (1,25 puntos)

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. (1,25 puntos)

Solución: a) $\text{Distancia}(P,\text{r})=\sqrt{\frac{3}{2}}\,u$ *b)* $s\equiv\begin{cases}x=3+t\\ y=1\\ z=-1+2t\end{cases}$

25. Castilla la Mancha Julio 2018. A.4. Dados los puntos A(–1; 3; 0); B(2; 0;–1) y la recta *r* intersección de los planos $\alpha: x-2y-6=0$ y $\beta: 2y+z=0$

a) Calcula la distancia del punto A a la recta *r*. (0,75 puntos)

b) Encuentra razonadamente el punto de la recta *r* cuya distancia al punto A sea mínima. (0,75 puntos)

c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por A y B sea paralelo a la recta *r*. (1 punto)

Solución: a) d(A, r)=6,67 u b) $P\left(\frac{32}{9},\frac{-11}{9},\frac{22}{9}\right)$ *c)* $7x+4y+9z=5$

26. Castilla la Mancha Julio 2018. B.4. Dados los puntos A(–1, 2, 0); B(1, 0, –4) y la recta

$$r:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=3+\lambda\end{cases}$$

a) Calcula razonadamente un punto C de la recta *r* que forme con A y B un triángulo isósceles con el lado desigual en AB. (1,5 puntos)

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta *r* y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto A. (1 punto)

Solución: a) C(3,-2,1) b) $s:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=0\end{cases}$

27. Castilla la Mancha Junio 2018. 4A. Dado el plano $\alpha\equiv 4x+2y+4z-15=0$ y el punto *A(2,–3,1)*

a) Calcula la distancia del punto A al plano α. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α. **(1,5 puntos)**

Solución: a) $d(A,\alpha)=1.5\,u$ *b) El lugar geométrico son dos planos paralelos a α situados a 1.5 unidades del plano α. Uno por encima y otro por debajo del plano α.* $\pi: 2x+y+2z-3=0; \quad \beta: 2x+y+2z-12=0$

28. Castilla la Mancha Junio 2018. 4B. a) Dados los vectores $\vec{u}=(0,1,1)$, $\vec{v}=(1,1,-1)$ y $\vec{w}=(2,0,3)$:
a) Determina el valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u}-\lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**
b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto *P(2, 0, 2)* y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

Solución: a) $\lambda=-3$ *b) Son linealmente independientes c)* $r\equiv\begin{cases}x+2y-2=0\\ y+z-2=0\end{cases}$

29. Castilla la Mancha Septiembre 2017. 4A. Dados los planos $\alpha\equiv -x+2y+z+2=0$ y $\beta\equiv -2y+z=0$
a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto *P(0,–1,3)*. **(1 punto)**

Solución: a) $Volumen=\frac{2}{3}=0.66\,u^3$ *b)* $r\equiv\begin{cases}x-4y-4=0\\ -2y+z-5=0\end{cases}$

30. Castilla la Mancha Septiembre 2017. 4B. a) Halla razonadamente el valor de $a\in\mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha\equiv x-y-az+5=0$ es paralelo a la recta

$$r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{2}$$ **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente la distancia del punto *P(1, 2, 3)* a la recta $r\equiv\frac{x-3}{2}=y-1=z$ **(1,25 puntos)**

Solución: a) a = 4 b) $\text{Distancia}(P,r)=\sqrt{14}\,u$

31. Castilla la Mancha Junio 2017. 4A. Dado el punto *P(2, 0,–1)* y las rectas

$$r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{0} \text{ y } s\equiv\begin{cases}x-y+2z+4=0\\ x+z+1=0\end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas *r* y *s*. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por *P* es paralelo a *r* y a *s*. **(1,5 puntos)**

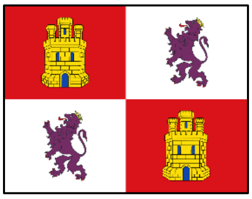
Solución: a) Las rectas r y s se cruzan. b) $\pi\equiv 2x+y+z-3=0$

32. Castilla la Mancha Junio 2017. 4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos *P(0, 1, –2)* y *Q(4, –3, 0)*. **(1 punto)**
b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de *P* y *Q* y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$ **(1,5 puntos)**

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -x + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ *b)* $S\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right)$

Castilla y León



1. Castilla y León Extraordinaria 2023. E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, y $r_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1. **(1 punto)**

b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto (1,0,0). **(1 punto)**

Solución: a) Los vectores directores de las rectas no son perpendiculares y no existe el plano pedido. b) $t: \begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -4\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

2. Castilla y León Extraordinaria 2023. E4.- (Geometría)

Sea r la recta que pasa por los puntos (1, 0, –1) y (0, 1, 1).

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto P = (0,0,1). **(1 punto)**

b) Calcular la distancia de la recta r al punto P = (0,0,1). **(1 punto)**

Solución: a) $\pi: 2x+z-1=0$ *b)* $d(P,r) = \frac{\sqrt{30}}{6} \simeq 0.913$ *unidades*

3. Castilla y León Ordinaria 2023. E3.- (Geometría)

Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x+2y+3z=0$ y pasa por los puntos P = (0,0,0) y Q = (0,1,1). **(2 puntos)**

Solución: $\pi \equiv -x-y+z=0$

4. Castilla y León Ordinaria 2023. E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv x+2y-2z=0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$, se pide:

a) Comprobar que r es paralela a π. **(1 punto)**

b) Hallar el plano σ, distinto de π y paralelo a π, cuya distancia a r coincide con la de π. **(1 punto)**

Solución: a) b) $\sigma \equiv x+2y-2z-12=0$

5. Castilla y León Extraordinaria 2022. E3.- (Geometría)

a) Calcule el plano que pasa por el punto (1, 0, 1) y es paralelo a los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,2,3)$. **(1.5 puntos)**

b) Calcule el plano paralelo a $3x+2y+2z+1=0$ que pasa por el punto (1,2,3). **(0.5 puntos)**

Solución: a) $\pi \equiv x-2y+z-2=0$ b) $\pi' \equiv 3x+2y+2z-13=0$

6. Castilla y León Extraordinaria 2022. E4.- (Geometría)

a) Encuéntrense las ecuaciones de la recta que está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ y pasa por el punto P = (1, 1, 3). **(1 punto)**

b) Hállese la ecuación del plano que es paralelo a $r \equiv x - 1 = y + 2 = \frac{z-1}{2}$ y pasa por los puntos $A = (0,\ 3,\ 1)$ y $B = (-2,\ 1,\ -1)$. **(1 punto)**

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ *b)* $\pi \equiv x - y + 3 = 0$

7. Castilla y León Ordinaria 2022. E3.- (Geometría)

a) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = 0$, calcule *m* para que la recta y el plano sean perpendiculares. **(1 punto)**

b) Calcule el plano perpendicular a los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_1 \equiv x - y + z = 2$, que pasa por el punto (1,2,3). **(1 punto)**

Solución: a) m = 4. b) $\pi_2 : x - z + 2 = 0$

8. Castilla y León Ordinaria 2022. E4.- (Geometría)

Considere el punto *P = (2,2,1)* y el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 3z + 6 = 0$.

a) Halle la recta que pasa por *P* y es perpendicular a *π*. **(1 punto)**

b) Calcule la distancia del punto *Q*=(2,2,−2) al plano *π*. **(1 punto)**

Solución: a) $r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$ *b)* $d(Q, \pi) = \sqrt{22} \simeq 4.69u$

9. Castilla y León Extraordinaria 2021. E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de *r* y *s*. **(1 punto)**

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a *r* y *s*. **(1 punto)**

Solución: a) Son paralelas b) $\pi \equiv 7x + y - 4z + 9 = 0$

10. Castilla y León Extraordinaria 2021. E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

a) Calcular el plano π_1 que pasa por A = (1,2,3) y es perpendicular a la recta *r*. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el plano π_2 que pasa por B = (–1,1,–1) y contiene a la recta *r*. **(1,5 puntos)**

Solución: a) $\pi_1 \equiv x - y + 2z - 5 = 0$ *b)* $\pi_2 \equiv -4x + 2y + 3z - 3 = 0$

11. Castilla y León Ordinaria 2021. E3.- (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ que pasa por el punto $A = (0,0,0)$. **(0,8 puntos)**

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P = (1,1,1)$ *y* $Q = (1,3,\ -1)$ son simétricos. **(1,2 puntos)**

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$ *b)* $\pi \equiv y - z - 2 = 0$

12. Castilla y León Ordinaria 2021. E4.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto *P = (0,0,0)*, hallar la ecuación del plano π que contiene a *r* y pasa por el punto *P*, **(2 puntos)**

Solución: $\pi \equiv -4x - 2y + z = 0$

13. Castilla y León Extraordinaria 2020. E3.- (Geometría)

Dado el punto $P = (2,1,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$,

a) Hallar la recta paralela a *r* que pase por *P* **(0,8 puntos)**

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto *P* y contiene a la recta *r*. **(1,2 puntos)**

Solución: a) $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$ *b)* $\pi \equiv -3x + 3y - 2z + 5 = 0$

14. Castilla y León Extraordinaria 2020. E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$ **(1 punto)**

b) Calcular el punto simétrico del (1, 2, 3) respecto del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$. **(1 punto)**

Solución: a) $s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$ *b)* $P'(-5,-2,1)$

15. Castilla y León Ordinaria 2020. E3.- (Geometría)

Sea el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y el punto $A = (1,3,-1)$.

Hallar la ecuación del plano que pasa por *A*, es paralelo a *r* y perpendicular a π. **(2 puntos)**

Solución: $\pi' \equiv 2x - 2y - 3z + 1 = 0$

16. Castilla y León Ordinaria 2020. E4.- (Geometría)

Dado el punto $A = (1,2,4)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$,

a) Hallar un punto *B* de la recta *r* de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi \equiv x + 2z = 0$ **(1,5 puntos)**

b) Hallar un vector (a,b,c) perpendicular a $(1,0,-1)$ *y* $(2,1,0)$. **(0,5 puntos)**

Solución: a) $B(3,2,3)$ *b)* $\vec{v} = (1,-2,1)$

17. Castilla y León Julio 2019. Opción A. E2.-

a) Consideremos los vectores $\vec{u} = (1,1,a)$ y $\vec{v} = (1,-1,a)$. Calcular a para que sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p} = (1,2,3)$ y $\vec{q} = (1,-2,-3)$ **(1,5 puntos)**

Solución: a) a = 0 b) $\vec{r} = \left(0, \frac{-6}{\sqrt{52}}, \frac{4}{\sqrt{52}}\right)$

18. Castilla y León Julio 2019. Opción B. E2.-
Hallar a y b para que los vectores $(a,-1,2)$ y $(1,b,-2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

Solución: a = 2 y b = –2

19. Castilla y León Junio 2019. Opción A. E2.-
a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A=(1,2,1)$. **(1 punto)**
b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $\boldsymbol{B}=(2,1,2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$ y $s_2\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$. **(1 punto)**

Solución: a) $\pi\equiv 2x-2z=0$ *b)* $r\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z-2}{8}$

20. Castilla y León Junio 2019. Opción B. E2.-
Sean la recta $r\equiv\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi\equiv x+y+kz=0$. Encontrar m y k para que:
a) La recta r sea perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi}$. **(1 punto)**
b) La recta r esté contenida en el plano $\boldsymbol{\pi}$. **(1 punto)**

Solución: a) $m=k=2$ *b)* $m=6;\quad k=-2$

21. Castilla y León Julio 2018. Opción A. E2.-
Dados el plano $\pi\equiv 2x+y+z-3=0$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x+y+z=0\\ x-y+z=2\end{cases}$
a) Calcular el punto de intersección del plano π y de la recta r. **(1 punto)**
b) Encontrar la ecuación de la recta s contenida en el plano π y que corta perpendicularmente a r. **(1 punto)**

Solución: a) P(3, –1, –2) b) $s\equiv\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+2}{1}$

22. Castilla y León Julio 2018. Opción B. E2.-
Dados el plano $\pi\equiv ax+y-z+b=0$ y la recta $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.
a) Encontrar a y b para que la recta este contenida en el plano. **(1 punto)**
b) ¿Existen valores a y b para que la recta sea perpendicular al plano? Razonar la posible respuesta negativa o encontrarlos en su caso. **(1 punto)**

Solución: a) a = 2 y b = –1 b) a = –1 y b puede ser cualquier valor.

23. Castilla y León Junio 2018. Opción A. E2.- Determinar la recta s que es simétrica de $r\equiv x+2=y=z-2$, respecto del plano $\pi\equiv x-z+2=0$. **(2 puntos)**

Solución: $s\equiv x=y=z$

24. Castilla y León Junio 2018. Opción B. E2.- Dada la recta $r\equiv x-1=\frac{y+1}{2}=z-1$ y el plano $\pi\equiv x-y+z=0$, se pide:
a) Determinar la posición relativa de r y π. **(0,8 puntos)**

b) Hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π. **(1,2 puntos)**

Solución: a) r y π son paralelos b) $\pi' \equiv x-y+z-6=0$

25. Castilla y León Septiembre 2017. Opción A. E2.-

a) Consideremos los puntos $P(-1,-4,0)$, $Q(0,1,3)$, $R(1,0,3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P, Q y R. **(1,25 puntos)**

b) Calcular a para que el punto $S(3,a,2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x+y-2z+5=0$. **(1 punto)**

Solución: a) $\pi \equiv x+y-2z+5=0$ b) $a = -4$.

26. Castilla y León Septiembre 2017. Opción B. E2.-

a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,3,4) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+2z+4=0$. **(1,25 puntos)**

b) Calcular a para que las rectas $r \equiv x-1=y-2=\dfrac{z-2}{2}$, $s \equiv \dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ sean perpendiculares. **(1 punto)**

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=4+2t \end{cases}$ *b) $a = -8$.*

27. Castilla y León Junio 2017. Opción A. E2.-

Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x-y-z=0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-4}$ en el punto $P(2,-1,-2)$. **(2,25 puntos)**

Solución: $r \equiv \left. \begin{array}{r} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=-2+t \end{array} \right\}$

28. Castilla y León Junio 2017. Opción B. E2.-

Dado el plano $\pi \equiv 3x+y+z-2=0$ y los puntos P(0,1,1), Q(2,–1,–3) que pertenecen al plano π, determinar la recta del plano π que pasa por el punto medio entre P y Q y es perpendicular a la recta que une estos puntos. **(2,25 puntos)**

Solución: $r \equiv \left. \begin{array}{r} x=1+t \\ y=-7t \\ z=-1+4t \end{array} \right\}$

Cataluña

1. Cataluña PAU Extraordinaria 2023. 5. Sean r_1 y r_2 las rectas definidas por $r_1: x-1=y=-z$ y por $r_2: x=y=z$, respectivamente.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que corta perpendicularmente las rectas r_1 y r_2. [1,75 puntos]

b) Calcule la distancia entre r_1 y r_2. [0,75 puntos]

Solución: a) $s: \begin{cases} x=\frac{1}{2}-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{1}{4} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ *b)* $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.707$ *unidades*

2. Cataluña PAU Ordinaria 2023. 6. Sean los planos π_1 y π_2, determinados por las ecuaciones $\pi_1: x+y=3$ y $\pi_2: x-z=-2$.

a) Encuentre la ecuación general ($Ax+By+Cz+D=0$) del plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2, y que pasa por el punto P = (4, 1, 2). [0,75 puntos]

b) Sea *r* la recta de intersección de π_1 y π_2. Calcule la ecuación vectorial de la recta *r*. [0,75 puntos]

c) Calcule el punto Q de la recta *r* que está más cerca del punto P. [1 punto]

Solución: a) $\pi_3: -x+y-z+5=0$ *b)* $r: (x,y,z)=(-2,5,0)+\lambda(1,-1,1)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.*c)* $Q(2,1,4)$

3. Cataluña PAU Extraordinaria 2022. 1.

El mástil que sostiene la lona de la carpa de un circo se sitúa perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es *π*: *x – z = 6*. Se sabe que la cúpula de la carpa (el punto más elevado por el que pasa el mástil) está en el punto de coordenadas *P = (30, 1, 0)*.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el mástil. [1 punto]

b) Calcule las coordenadas del punto de contacto del mástil con el suelo, y la longitud del mástil**.** [1,5 puntos]

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x=30+\lambda \\ y=1 \\ z=-\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

b) $Q(18,1,12)$. *La longitud del mástil es* $12\sqrt{2} \simeq 16.97$ *unidades*

4. Cataluña PAU Ordinaria 2022. 3. Sea la recta *r* definida por la expresión siguiente:

$$r: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}.$$

a) Determine la posición relativa de la recta *r* respecto al plano $\pi: x-2y+4z-4=0$. Si es paralela, calcule la distancia de *r* a *π*, y si es secante, calcule el punto de corte. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta *s* perpendicular al plano *π* y que corta la recta *r* en un punto *P*, la primera coordenada del cual es 5 veces más grande que la segunda. [1,25 puntos]

Solución: a) Recta y plano son secantes y coinciden en el punto $P(14,35,15)$.

b) $P(2.5,0.5,3.5)$. $s \equiv \begin{cases} x = 2.5+\lambda \\ y = 0.5-2\lambda \\ z = 3.5+4\lambda \end{cases}$

5. Cataluña Extraordinaria 2021. 3. En $\mathbb{R}^3$ se dan los puntos A = (3, 1, 1), B = (0, 0, 1), C = (4, 1, 2) y D = (1, 1, t), donde *t* es un valor real.

a) ¿Para qué valor de *t* los cuatro puntos son coplanarios? [1 punto]

b) Encuentre el valor de *t* para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de 5u^3. [1,5 puntos]

Nota: El volumen de un tetraedro definido por los vectores v_1 , v_2 y v_3 es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores,, $V = \frac{1}{6}\left|\det(v_1, v_2, v_3)\right|$

Solución: a) t = –1 b) t = 29 o t = –31

6. Cataluña Ordinaria 2021. 3. Considere el punto *P* = (–1, 3, 1), el plano *π*: *x* = *y* y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$.

a) Encuentre las coordenadas del punto *P′* simétrico a *P* respecto del plano *π*. [1,25 puntos]

b) De todos los planos que contienen la recta *r*, encuentre la ecuación cartesiana del que es perpendicular al plano *π*. [1,25 puntos]

Solución: a) P´(3, –1,1) b) $\pi': x+y-5z+9=0$

7. Cataluña Extraordinaria 2020. Serie 4. 2. Un avió es desplaça des d'un punt *A*= (0, 3, 1) cap a una plataforma plana d'equació $\pi: x-2y+z=1$ seguint una recta *r* paral·lela al vector ***v*** = (1,–1,0).

a) Calculeu les coordenades del punt de contacte *B* de l'avió amb el pla i la distància recorreguda. [1,25 punts]

b) Calculeu l'equació general del pla perpendicular a la plataforma i que conté la recta *r* seguida per l'avió des del punt *A*. [1,25 punts]

Solución: a) Distancia$(A,B) = \sqrt{8} = 2{,}83\,u$ *b)* $\pi': x+y+z-4=0$

8. Cataluña Extraordinaria 2020. Serie 4. 6. Siguin les rectes *r* i *s*, expressades per $\frac{x-3}{2} = y = z-1$ i $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivament.

a) Determineu la posició relativa de les rectes. [1,25 punts]

b) Calculeu la distància entre la recta *r* i la recta *s*. [1,25 punts]

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) La distancia entre las rectas es de $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ *unidades.*

9. Cataluña Ordinaria 2020. Serie 1. 3. *a*) Calculeu l'equació general del pla *π* que passa pel punt (8, 8, 8) i té com a vectors directors $u=(1,2,-3)$ i $v=(-1,0,3)$. [1,25 punts]

b) Determineu el valor del paràmetre *a* perquè el punt (1,–5,*a*) pertanyi al pla *π* i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla *π*. [1,25 punts]

Solución: a) $\pi \equiv 3x+z-32=0$ b) $a=29$. $r \equiv \left.\begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=-5 \\ z=29+\lambda \end{array}\right\}$

10. Cataluña Septiembre 2019. Serie 5. 2. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentra los valores del parámetro a para el que la matriz es invertible. [1 punto]

b) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: x+(a-1)z=0$, $\pi_2: x+ay+z=1$ y $\pi_3: 4x+3ay+z=3$ en función de los valores del parámetro a. [1 punto]

Solución: a) Para a distinto de 0 y de –1. b) Si $a\neq 0$ *y* $a\neq -1$ *los planos se cortan en un punto. Si* $a=-1$ *los planos se cortan en una recta. Si* $a=0$ *los planos se cortan dos a dos.*

11. Cataluña Septiembre 2019. Serie 5. 5. Dados P, Q y R los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z = 4$ con los tres ejes de coordenadas OX, OY y OZ, respectivamente.

a) Calcule los puntos P, Q y R, y el perímetro del triángulo de vértices P, Q y R. [1 punto]

b) Calcule el área del triángulo de vértices P, Q y R. [1 punto]

Nota: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores ***v*** y ***w*** puede utilizar la expresión $S=\frac{1}{2}\|v\times w\|$, donde $v\times w$ es el producto vectorial de los vectores ***v*** y ***w***.

Solución: a) P(4,0,0); Q(0,1,0); R(0,0,2). El perímetro es $10{,}83\,u$ *b)* $\sqrt{21}\,u^2$

12. Cataluña Junio 2019. Serie 1. 3. Un dron se encuentra en el punto $P=(2,-3,1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo de ecuación $\pi: 3x+4z+15=0$.

a) Calcula la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que tiene que seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?

b) Encuentra las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

Solución: a) $r:\left.\begin{array}{l} x=2+3t\\ y=-3\\ z=1+4t\end{array}\right\}$; $\text{Distancia}(P,\pi)=5\,u$ *b) P´(–1,–3,–3)*

13. Cataluña Septiembre 2018. Serie 3. 3. Considere el plano que tiene como vectores directores $u = (–1, 3, 2)$ y $v = (2, 1, 0)$ y que pasa por el punto $A = (1, 0, 3)$.

a) Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A. [1 punto]

b) Calcule la distancia del punto $P = (1, 5, 0)$ al plano. [1 punto]

Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Solución: a) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{-7}$ *b)* $d(P,\ plano)=\frac{41\sqrt{69}}{69}=4.94\,u$

14. Cataluña Septiembre 2018. Serie 3. 5. Considere los puntos del espacio tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ y $C = (1, 0, 0)$ y la recta $r: x=y-1=\frac{z}{2}$.

a) Encuentre el punto de intersección de la recta r con el plano que pasa por los puntos A, B y C. [1 punto]

b) Encuentre los puntos P de la recta r para los cuales el tetraedro de vértices P, A, B y C tiene un volumen de 2 u^3. [1 punto]

Nota: El volumen de un tetraedro de vértices *P*, *Q*, *R* y *S* puede calcularse con la expresión $\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right)\right|$

Solución: a) (0, 1, 0) b) Hay dos soluciones: $P_1=(3,4,6)$ y $P_2=(-3,-2,-6)$

15. Cataluña Junio 2018. Serie 1. 2. Sea *r* la recta que pasa por los puntos *A*=(0, 1, 1) y *B*=(1, 1, –1).
a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta *r*. [1 punto]
b) Calcule todos los puntos de la recta *r* que están a la misma distancia de los planos $\pi_1: x+y=-2$ y $\pi_2: x-z=1$. [1 punto]
Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Solución: a) $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-2t \end{cases}$ *b) Hay dos soluciones:* $P_1=\left(\frac{5}{2},1,-4\right)$ *y* $P_2=\left(-\frac{1}{4},1,\frac{3}{2}\right)$

16. Cataluña Junio 2018. Serie 1. 4. Considere los puntos *P* = (3, –2, 1), *Q* = (5, 0, 3), *R* = (1, 2, 3) y la recta $r:\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+3z-5=0 \end{cases}$.
a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por *P* y *Q* y es paralelo a la recta *r*. [1 punto]
b) Dados el plano $x + 2y + m \cdot z = 7$ y el plano que pasa por *P*, *Q* y *R*, encuentre *m* para que sean paralelos y no coincidentes. [1 punto]

Solución: a) $5x+y-6z=7$ *b) m = -3*

17. Cataluña Septiembre 2017. Serie 2. 1. Considere el plano π: $x + y + z = 1$ y la recta *r* que pasa por los puntos *P* = (0, 0, 6) y *Q* = (1, 2, 3).
a) Estudie la posición relativa de la recta *r* y el plano π. [1 punto]
b) Calcule la distancia entre la recta *r* y el plano π. [1 punto]
Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Solución: a) Son paralelos b) $d(r,\pi)=\frac{5\sqrt{3}}{3}\simeq 2.887\,u$

18. Cataluña Septiembre 2017. Serie 2. 5. En $\mathbb{R}^3$, sean la recta $r:\begin{cases} x-z=2 \\ 2y+z=4 \end{cases}$ y el punto *P*=(0, 1, –1).
a) Calcule la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano π perpendicular a la recta *r* y que pasa por el punto *P*. [1 punto]
b) Calcule el punto simétrico del punto *P* respecto del plano $x + y + z = -3$. [1 punto]

Solución: a) $\pi: 2x-y+2z=-3$ *b) P´(–2, –1, –3)*

19. Cataluña Junio 2017. Serie 1. 2. Considere los planos π_1: $5x - y - 7z = 1$ y π_2: $2x + 3y + z = 5$.
a) Determine la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2. [1 punto]
b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2. [1 punto]

Solución: a) $20x-19y+17z=0$ *b)* $\alpha = 90^{o}$

20. Cataluña Junio 2017. Serie 5. 1. Sean las rectas de $\mathbb{R}^3$ $r:\begin{cases}2x-y=1\\ y-2z=0\end{cases}$ y $s:\left\{x+1=\dfrac{y-2}{2}=z-1\right.$.

a) Compruebe que son paralelas. [1 punto]
b) Calcule la ecuación vectorial del plano que las contiene. [1 punto]

Solución: a) Son paralelas, pues sus vectores directores tienen coordenadas proporcionales.

b) $\pi:(x,y,z)=(-1,2,1)+\lambda(1,2,1)+\mu\left(-\dfrac{3}{2},2,1\right)$

Extremadura

1. Extremadura Extraordinaria 2023. 3. Sean los vectores $\vec{u}=(0,0,2)$, $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-1,1)$

a) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes? (0.5 puntos)

b) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0.75 puntos)

c) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (0.75 puntos)

Solución: a) Son linealmente independientes. b) Área = $\sqrt{2}$ *unidades cuadradas.*

c) $\vec{t}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{-3}{\sqrt{11}}\right)$ *y* $\vec{t'}=\left(\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$

2. Extremadura Extraordinaria 2023. 4. Dados los puntos $A=(0,0,2)$ y $B=(1,1,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1\\y=z\end{cases}$.

a) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$. (1.25 puntos)
b) Hallar la distancia del punto A a la recta r. (0.75 puntos)

Solución: a) $\pi:3x-y+z-3=0$ *b)* $D(A,r)=\sqrt{3}$ *unidades*

3. Extremadura Ordinaria 2023. 4. Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}=(1,2,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$. (2 puntos)

Solución: $\vec{w'}=\left(\frac{10}{3},\frac{-5}{3},\frac{10}{3}\right)$ *y* $\vec{w''}=\left(\frac{-10}{3},\frac{5}{3},\frac{-10}{3}\right)$

4. Extremadura Extraordinaria 2022. 3. Dados los puntos A = (0, 0, 2) y B = (1, 1, 0) y la recta $r:\begin{cases}x=1\\y=z\end{cases}$. (2 puntos)

Calcular un punto $P\in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A.

Solución: P(1, 5, 5)

5. Extremadura Extraordinaria 2022. 4. Sean las rectas: $r:\begin{cases}x=2-2y\\z=1-x\end{cases}$ y $s:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$.

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s. (1 punto)
b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $d(r,s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0.7u$

6. Extremadura Ordinaria 2022. 3. Dados el plano π de ecuación $x+2y-z=0$ y r la recta de ecuaciones $r:\begin{cases}y-2x=1\\x-z=0\end{cases}$,

a) Hallar el punto de intersección del plano π y la recta *r*. (1 punto)
b) Calcular la distancia del origen a la recta *r*. (1 punto)

Solución: a) $P\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$ *b)* $d\left(O,r\right)=\sqrt{\frac{1}{3}}\,u$

7. Extremadura Ordinaria 2022. 4. Dada la recta *r* definida por

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1},$$

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a *r*. (1 punto)
b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a *r*. (1 punto)

Solución: a) $\pi:-7x+3y+5z=0$ *b)* $\pi':2x+3y+z=0$

8. Extremadura Extraordinaria 2021. 3. Sean las rectas *r* y *s* dadas por $r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2-3\lambda\\ z=1\end{cases}$,

$s:\begin{cases}x+y+z=2\\ x-y-z=4\end{cases}$

a) Obtener un plano π que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*. (1 punto)
b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

Solución: a) $\pi:3x+y+z-6=0$ *b)* $d\left(r,s\right)=\frac{2}{\sqrt{11}}\simeq 0.60\,u$

9. Extremadura Extraordinaria 2021. 4. Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u}=\left(1,1,-1\right)$ y $\vec{v}=\left(2,1,0\right)$. (2 puntos)

Solución: $\vec{w}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2},-\sqrt{6},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ *o* $\vec{w}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{6},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

10. Extremadura Ordinaria 2021. 3. Dados el plano $\Pi\equiv kx+y-z=0$ y la recta $r\equiv\frac{x-4}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$.

a) Determinar los valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$ para que el plano Π contenga a *r*. (1 punto)
b) Para *k = 0*, calcular el ángulo que forman Π y *r*. (1 punto)

Solución: a) k = –1 b) 36º

11. Extremadura Ordinaria 2021. 4. Sea el plano $\Pi\equiv x+y+z=1$. Encontrar un plano paralelo a Π tal que el triángulo formado por los puntos de corte de dicho plano con los ejes tenga área $2\sqrt{3}$. (2 puntos)

Solución: Los planos que cumplen la condición pedida son $\Pi'\equiv x+y+z+2=0$ *y* $\Pi''\equiv x+y+z-2=0$

12. Extremadura Extraordinaria 2020. 3. Sean los vectores $\vec{u}=\left(4,3,\alpha\right)$, $\vec{v}=\left(\alpha,1,0\right)$ y $\vec{w}=\left(2\alpha,1,\alpha\right)$ (con $\alpha\in\mathbb{R}$)

(a) Determine los valores de α para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes. (1 punto)
(b) Para el valor $\alpha=1$ exprese $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1 punto)

Solución: a) Para cualquier valor de α *distinto de 0 y 1 b) Se cumple que* $\vec{w}=\vec{u}-2\vec{v}$.

13. Extremadura Extraordinaria 2020. 4. Dados el plano π_1 determinado por los puntos (0, 1, 1), (2, 0, 2) y (1, 2, 6) y el plano π_2 dado por la ecuación $x-y+z=3$. Calcule una recta paralela a los dos planos y que no esté contenida en ninguno de ellos. (2 puntos)

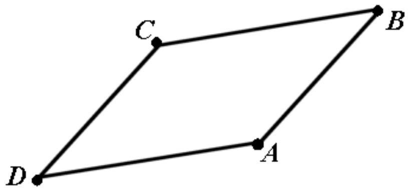
Solución: $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-5}$

14. Extremadura Ordinaria 2020. 3. Sean el plano π de ecuación $2x+y-z-2=0$ y la recta r dada por $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{3}$

(a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)
(b) Calcule la distancia de la recta al plano. (1 punto)

Solución: (a) Son paralelos (b) $d(r,\pi)=\frac{1}{\sqrt{6}}=0,408\,u$

15. Extremadura Ordinaria 2020. 4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-2)$, $B(4,3,1)$ *y* $C(1,0,1)$ como podemos observar en la siguiente representación:



a) Calcule el cuarto vértice D. (1 punto)
b) Calcule el área del paralelogramo. (1 punto)

Solución: a) $D(-2,0,-2)$ *b)* *Área de ABCD* $=\sqrt{243}=15,59\,u^2$

16. Extremadura Julio 2019. Opción A. 2. Sean las rectas $r:\begin{cases} x=1+y \\ z=1 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$

(a) Estudie si las trayectorias de las rectas se cortan, se cruzan o coinciden. **(1 punto)**
(b) Halle dos vectores directores de r y s. Calcule el área del triángulo que forman. **(1 punto)**

Solución: a) Las rectas r y s se cruzan. b) $\vec{v_r}=(1,1,0)$ *y* $\vec{v_s}=(1,0,1)$. *Área* $=\frac{\sqrt{3}}{2}u^2$

17. Extremadura Julio 2019. Opción B. 2. Sean r la recta que pasa por los puntos A = (0,0,–1) y B = (0,–2,–1) y s la recta que pasa por los puntos C = (–1,2,0) y D = (1,0,–1).

(a) Calcule el plano π que contiene a s y es paralelo a r. **(1 punto)**
(b) Calcule la distancia entre r y s. **(1 punto)**

Solución: a) $\pi \equiv x+2z+1=0$ *b)* $d(r,s)=\sqrt{5}\,u$

18. Extremadura Junio 2019. Opción A. 2. Sean los puntos A = (0,0,2), B = (2,0,1), C = (0,2,1) y D=(–2,2,–1).

a) Halle la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C. **(2 puntos)**
b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios. **(0,5 puntos)**
c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D. **(0,75 puntos)**

Solución: a) $\pi: x+y+2z-4=0$ *b) A, B, C y D no son coplanarios. c)* $\text{Área}=2\sqrt{3}\,u^2$

19. Extremadura Junio 2019. Opción B. 2. Dados los puntos A=(1,0,2) y B=(3,–2,–2). Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio. **(2 puntos)**

Solución: $\pi: x-y-2z-3=0$

20. Extremadura Julio 2018. Opción A. 2.- Sean los puntos A = (2, 0, 1), B = (2, 0, 3) y la recta *r* dada por el punto C = (1, 0, 2) y el vector $\vec{v}=(-1,0,0)$. Determine los puntos *P* de la recta *r* para los cuales el área del triángulo ABP es 2. **(2,5 puntos)**

Solución: Existen dos puntos de la recta r que cumplen lo pedido: P´(0, 0 ,2) y P(4, 0, 2)

21. Extremadura Julio 2018. Opción B. 2.- Sean las rectas $r=\frac{x-3}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-2}{4}$ y $s=\begin{cases}x-y-z=2\\2x+2y-z=4\end{cases}$.

(a) Estudie la posición relativa de dichas rectas. **(1 punto)**
(b) Halle la distancia entre ambas rectas. **(1’5 puntos)**

Solución: (a) Son paralelas (b) $d(r,s)=\frac{\sqrt{4836}}{13}=5{,}34\,u$

22. Extremadura Junio 2018. Opción A. 2. Sean el plano $\Pi: y+z=0$ y la recta $r:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

(a) Calcule la intersección del plano y la recta. **(1 punto)**
(b) Determine la recta *s* que pasa por el punto P = (1,0,0), es paralela al plano Π y es perpendicular a la recta *r*. **(1,5 puntos)**

Solución: (a) A(1, –3, 3). (b) $s:\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$

23. Extremadura Junio 2018. Opción B. 2. Sea el punto A = (1,0,1) y la recta *r* dada por el punto B = (–1,0,2) y el vector $\vec{v}=(-1,1,0)$. (a) Calcule la distancia del punto A a la recta *r*. **(1,5 puntos)**
(b) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y O siendo O = (0,0,0). **(1 punto)**

Solución: (a) $d(A,r)=\sqrt{3}\,u$ *(b)* $\text{Área}=\frac{3}{2}u^2$

24. Extremadura Julio 2017. Opción A. 2.- Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r:\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $s:\begin{cases}x+y=1\\z=0\end{cases}$

(a) Obtenga un vector director de la recta *s*. **(0,5 puntos)**
(b) Obtenga el plano Π_1 que contiene a *r* y es paralelo a *s*. **(1 punto)**
(c) Obtenga el plano Π_2 que contiene a *r* y es perpendicular a *s*. **(1 punto)**

Solución: (a) $\vec{v_s}=(-1,1,0)$ *(b)* $\Pi_1\equiv x+y=0$ *(c)* $\Pi_2\equiv -x+y=0$

25. Extremadura Julio 2017. Opción B. 2.- Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos A (1, 2, 1), B = (–2, –1, –3), C = (0, 1, –1) y D = (0, 3, –1), y sea *r* la recta que pasa por A y B.
(a) Calcule ecuaciones paramétricas de *r*. **(1 punto)**

(b) Obtenga un punto P de la recta *r* tal que la distancia de C a P sea igual a la distancia de D a P. **(1,5 puntos)**

Solución: (a) $r:\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=1+4\lambda \end{cases}$ *(b) A (1, 2, 1)*

26. Extremadura Junio 2017. Opción A. 2.- Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{e}=(0,1,0)$, $\vec{u}=(3,-2,2)$ y $\vec{v}=(0,1,1)$.

(a) Calcule el producto vectorial $\vec{e}\times\vec{u}$. **(0,75 puntos)**

(b) Calcule el ángulo φ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

(c) Demuestre que la familia de vectores $\{\vec{e},\vec{u},\vec{v}\}$ es linealmente independiente. **(1 punto)**

Solución: (a) $\vec{e}\times\vec{u}=(2,0,-3)$ *(b) El ángulo es de 90º (c)* $\left[\vec{e},\vec{u},\vec{v}\right]=-3\neq 0$

27. Extremadura Junio 2017. Opción B. 2.- En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas de ecuaciones:

$r:\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x-2z=-8 \end{cases}$, $\quad s=\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z-1}{-1}$ y.

(a) Halle el valor de *a* para que *r* y *s* sean paralelas. **(1 punto)**

(b) Para el valor de *a* obtenido en el anterior apartado, calcule la distancia entre las rectas *r* y *s*. **(1’5 puntos)**

Solución: (a) a = 3 (b) $d(r,s)=\sqrt{5}=2,23\,u$

Galicia

1. Galicia ABAU Extraordinaria 2023. 5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi: ax+y+z=1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{3}$.
Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi: -3x+y+z=1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y-b}{3}=\frac{z+1}{3}$ esté contenida en π.

Solución: a) Para $a=-3$ la recta r y el plano π son paralelos. Para $a \neq -3$ los vectores no son perpendiculares y la recta r y el plano π se cortan. Para $a=\frac{2}{3}$ recta y plano son secantes y además son perpendiculares. La recta r no puede estar contenida en el plano. b) El valor buscado es b = 5.

2. Galicia ABAU Extraordinaria 2023. 6. Geometría:

Considérese el plano $\pi: 2x-y+z=1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=0 \\ z=1-\lambda \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x=\mu \\ y=-1+\mu \\ z=0 \end{cases}, \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

Solución: a) $d(P,\pi)=\frac{\sqrt{6}}{6} \simeq 0.408$ unidades. b) El punto simétrico es $P'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-1}{3}\right)$

3. Galicia ABAU Ordinaria 2023. 5. Geometría:

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x+z+2=0$.

Solución: a) $r: \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$. $\pi: x+z+2=0$ b) El ángulo formado entre recta y plano es 30º.

4. Galicia ABAU Ordinaria 2023. 6. Geometría:

a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi: x+z+2=0$.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución: a) El punto simétrico es $P'(-2,-1,-4)$ b) Las rectas son secantes y se cortan en $A(0,-3,0)$

5. Galicia ABAU Extraordinaria 2022. 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$ y pasa por el punto *P(0, 1, 0)*.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto al plano $\pi:3x-8y+7z+8=0$.

Solución: a) $\pi:3x-8y+7z+8=0$ *b)* $P'(-1,18,-15)$

6. Galicia ABAU Extraordinaria 2022. 6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{k}=\dfrac{z}{3}$ y el plano $\pi:ax+4y+3az+2=0$ en función de los parámetros k y a. Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π.

Solución: Si $5a+2k\neq0$ *recta y plano son secantes. Si* $5a+2k=0$ *y a ≠ 6 recta y plano son paralelos. Si* $5a+2k=0$ *y a = 6 (k = –15 y a = 6) la recta está contenida en el plano.*

Para que la recta r sea perpendicular a π la condición es que a · k = 4

7. Galicia ABAU Ordinaria 2022. 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-1 \quad \lambda\in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$.

b) Calcule los dos puntos de la recta $r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=\lambda,\lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}$, cuya distancia al plano $\pi:x-1=0$ es igual a 2.

Solución: a) $\pi:x-1=0$ *b) P(3, 3, 3) o P(–1, –1, –1)*

8. Galicia ABAU Ordinaria 2022. 6. Geometría:

a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{2}$ y $s:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución: a) Los valores buscados son k = 2 y m = –1. b) Las rectas se cortan en el punto C(1, –1, 2).

9. Galicia Extraordinaria 2021. 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas $\pi:\begin{cases}x=1-\lambda,\\ y=2+\mu, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}\\ z=1+\lambda+2\mu,\end{cases}$

b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ y $D(2,0,2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

Solución: a) $\pi:x-2y+z+2=0$ *b) m = –4.* $\pi:x+y-3z+4=0$.

10. Galicia Extraordinaria 2021. 6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi:2x-y+z+3=0$.

Solución: $P'(-3,3,0)$

11. Galicia Ordinaria 2021. 5. Geometría:
a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.
b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi : 4x+2y-3z-15=0$ y que pasa por el punto $P(-1,-2,2)$

Solución: a) $\pi \equiv 4x+2y-3z-15=0$ *b)* $r \equiv \left.\begin{array}{l} x=-1+4\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=2-3\lambda \end{array}\right\}$

12. Galicia Ordinaria 2021. 6. Geometría:
Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r : \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$ y $s : \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte

Solución: Las rectas se cortan. El punto de corte de las rectas es P(1, 1, 1).

13. Galicia Extraordinaria 2020. 5. Geometría:
Sean r la recta de vector director $\overrightarrow{d_r}(1,0,3)$ que pasa por (1,0,0) y $\pi : -2x+y+z=0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

Solución: Recta y plano se cortan en un punto de coordenadas A(3, 0, 6).

14. Galicia Extraordinaria 2020. 6. Geometría:
a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.
b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por P(1,0,0) y contiene a $r : x-1=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$.

Solución: a) k = 1 b) $\pi : 4x+y-4=0$

15. Galicia Ordinaria 2020. 5. Geometría:
a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.
b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi : 4x+2y-3z-15=0$ y que pasa por el punto $P(-1,-2,2)$

Solución: a) $\pi \equiv 4x+2y-3z-15=0$ *b)* $r \equiv \left.\begin{array}{l} x=-1+4\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=2-3\lambda \end{array}\right\}$

16. Galicia Ordinaria 2020. 6. Geometría:
Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r : \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$ y $s : \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución: Las rectas se cortan en el punto P(1, 1, 1).

17. Galicia Julio 2019. Opción A. 3. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : x+my+z+2=0$, $\pi_2 : mx+y+z+m=0$ en función de m.
b) Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos A(0,k,1), B(–1,2,1) y C(8,1,m) estén alineados.
c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos P(–1,2,1) y Q(8,1,1) y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto R(1,1,1).

Solución: a) Para $m=1$ *los planos son paralelos. Si* $m \neq 1$ *los planos son secantes.*

b) $m=1;\ k=\dfrac{17}{9}$ *c)* $r \equiv \begin{cases} x=8+9t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}$; $\pi \equiv 9x-y-8=0$

18. Galicia Julio 2019. Opción B. 3. Se pide:
a. Para el plano $\pi : 3x+2y-z=0$ y la recta $r : \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{3}$, calcular el punto de corte de *r* con π y obtener la ecuación implícita del plano π´ que es perpendicular a π y contiene a *r*.
b. Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : 2x-5y-4z-9=0$ y $\pi_2 : x=0$ y calcular el ángulo ∝ ∈ [0,90] que forman.

Solución: a. P(3,–3,3) $\pi' \equiv 2x-5y-4z-9=0$ *b. Son secantes y definen una recta.* $\left(\pi_1,\pi_2\right)=72,65^{\circ}$

19. Galicia Junio 2019. Opción A. 3. Se pide:
a. Calcular el ángulo del intervalo [0º, 90º] que forman los vectores $\vec{u}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $\vec{v}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$
b. Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto P(1,–3,0) y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-z=0 \end{cases}$
c. Calcula la distancia del punto Q(1,1,1) al plano $\pi : -x+y+z+4=0$ y el punto simétrico de Q respecto de π.

Solución: a. 60º *b.* $\pi : -x+y+z+4=0$ *c.* $d\left(Q,\pi\right)=\dfrac{5}{\sqrt{3}}u$; $Q'=\left(\dfrac{13}{3},\dfrac{-7}{3},\dfrac{-7}{3}\right)$

20. Galicia Junio 2019. Opción B. 3. Da respuesta a los apartados siguientes:
a. Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx-y+2=0$ y $\pi_2 : 2x+3y=0$ en función del parámetro *m*.
b. Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A(0,0,0), B(1,0,1) y C(0,1,0).
c. Calcula el punto simétrico del punto P(1,2,3) con respecto al plano $\pi : -x+z=0$

Solución: a. Si $m \neq \dfrac{-2}{3}$ *se cortan. Si* $m=\dfrac{-2}{3}$ *los planos son paralelos. b.* $\pi : x-z=0$ *c) P´(3,2,1)*

21. Galicia Septiembre 2018. Opción A. 3. Dada a recta $r : \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$
a) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polo punto $A(1,1,1)$ e é perpendicular a r.
b) Calcula a ecuación implícita o xeral do plano que pasa polos puntos $P(-1,0,6)$ e $Q(3,-2,4)$ e é paralelo á recta r.
c) Calcula a distancia da recta r ao plano $x+y+z-5=0$.

Solución: a) $\pi_1 : x - z = 0$ *b)* $\pi_2 : x + y + z - 5 = 0$ *c)* $d(r, \pi_2) = \sqrt{3}\, u$

22. Galicia Septiembre 2018. Opción B. 3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(9,4,1)$ e $Q(1,1,1)$. Dada a recta $s : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-5}{-1}$

a) Estuda a posición relativa das rectas r e s. Calcula, se se cortan, o punto de corte.
b) Calcula, se existe, a ecuación implícita ou xeral do plano que contén as rectas r e s.
c) Calcula a distancia do punto $O(0,0,0)$ á recta s.

Solución: a) Las se cortan en el punto (9, 4, 1) b) $\pi : 3x - 8y - 2z + 7 = 0$ *c)* $d(O, s) = \dfrac{7\sqrt{2}}{2} u$

23. Galicia Junio 2018. Opción A. 3. a) Determina o valor de λ para que os puntos $A(3,0,-1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,-2,-5)$ e $D(\lambda, 6, -1)$ sexan coplanarios e calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que os contén.
b) Determina a posición relativa do plano π: $4x + 2y - 3z - 15 = 0$ e a recta r que pasa polos puntos $P(-4,4,2)$ e $Q(4,8,-4)$. Se se cortan, calcula o punto de corte.
c) Calcula o punto simétrico do punto $P(-4,4,2)$ respecto do plano π: $4x + 2y - 3z - 15 = 0$.

Solución: a) $\lambda = 0$ *b) Se cortan. El punto de corte es M(0, 6, –1) c) P´(4, 8, –4)*

24. Galicia Junio 2018. Opción B. 3. a) Dado o plano π: $2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula o valor de a para que a recta r que pasa polos puntos $P(a, a, a)$ e $Q(1,3,0)$ sexa paralela a o plano π.
b) Para $a = 1$, calcula a distancia de r a π.
c) Para $a = 1$, calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a π e contén a r.

Solución: a) a = 1 b) $d(r, \pi) = \dfrac{4}{3} u$ *c)* $\alpha : 5x + 2y + 4z - 11 = 0$

25. Galicia Septiembre 2017. Opción A. 3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $(0,1,3)$ e $(1,1,1)$ e s a recta $s : \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.
b) ¿É s paralela ao plano YZ? ¿Está contida no devandito plano?
c) Calcula a distancia da recta r ao plano π: $2x + z = 0$.

Solución: a) Se cruzan b) s es paralela al plano YZ. s no está contenida en el plano YZ c) $d(r, \pi) = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} u$

26. Galicia Septiembre 2017. Opción B. 3. Dados os planos α: $2x - 2y + 4z - 7 = 0$;
$\beta : \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$; e a recta $r : \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa dos planos α e β. Calcula a distancia entre eles.
b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a α e contén á recta r.
c) Sexan P e Q os puntos de corte da recta r cos planos XY e YZ respectivamente. Calcula a distancia entre P e Q.

Solución: a) Son paralelos $d(\alpha, \beta) = \dfrac{\sqrt{6}}{12} u$ *b)* $\pi : x + 5y + 2z - 28 = 0$ *c)* $d(P, Q) = \dfrac{3\sqrt{5}}{2} u$

27. Galicia Junio 2017. Opción A. 3. Dados os planos π_1: $x + y - z + 2 = 0$; $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \quad \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π_1 e π_2. Se se cortan, calcula o ángulo que forman.
b) Sexa r a recta que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e é perpendicular a π_1. Calcula o punto de corte de r e π_1.
c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,1,1)$ respecto do plano π_1

Solución: a) Se cortan en una recta. $\propto = 90º$ b) M(0, 0, 2) c) P ´(–1, –1, 3)

28. Galicia Junio 2017. Opción B. 3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(1,0,5)$ e $Q(5,2,3)$
a) Calcula a distancia do punto $A(5, -1,6)$ á recta r.
b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a r e pasa polo punto $A(5, -1,6)$.
c) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1,6)$ e o punto de corte da recta r co plano π: $2x + y - z - 3 = 0$.

Solución: a) $d\left(A,r\right) = 2\sqrt{3}\,u$ *b)* $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$ *c)* $Área\ AMP = 3\sqrt{2}\,u^2$

La Rioja

1. La Rioja Extraordinaria 2023. 7.- (2 puntos) La proyección ortogonal del punto P(1, 0, –1), sobre el plano π es el punto Q(–3, 2, 5). Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π.

Solución: $\pi : -2x + y + 3z - 23 = 0$. *El punto simétrico de P respecto a π es el punto* $P' = (-7, 4, 11)$

2. La Rioja Extraordinaria 2023. 7.- (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro *m*:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Solución: Si $m \neq 1;\ m \neq -2$ *los tres planos coinciden en un punto. Si* $m = 1$ *los tres planos son coincidentes. Si* $m = -2$ *los planos se cortan dos a dos en rectas que son paralelas entre sí.*

3. La Rioja Ordinaria 2023. 7.- (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x + 2y - 11z + 3 = 0$.

Solución: Plano y recta son secantes (coinciden en un punto).

4. La Rioja Ordinaria 2023. 8.- (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto *A(0, 2, 3)* respecto al plano π de ecuación $x + y - z = 4$.

Solución: El punto simétrico es $A'\left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

5. La Rioja Extraordinaria 2022. 7.- (2 puntos) Determina según los valores del parámetro real *a* la posición relativa de la recta

$$\begin{cases} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

y el plano de ecuación $6x + 5y - 3z = 2$

Solución: Si $a = 2$ *recta y plano son paralelos y si* $a \neq 2$ *recta y plano son secantes (coinciden en un punto)*

6. La Rioja Extraordinaria 2022. 8.- (2 puntos) Estudia según los valores del parámetro real *a* la posición relativa de las rectas siguientes:

$$\begin{cases} ax + 3y - 2z = 12, \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 6 + 4\lambda \end{cases}$$

Solución: Si $a = 4$ *las rectas se cortan y si* $a \neq 4$ *las rectas se cruzan.*

7. La Rioja Ordinaria 2022. 7.- (2 puntos) Halla la ecuación de una recta paralela al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y que contenga al punto $P(1,0,1)$. ¿Es única dicha recta? Razona la respuesta.

Solución: Una recta que pase por el punto P y sea paralela a un plano no es única. $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

8. La Rioja Ordinaria 2022. 8.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros *a*, y *b* para que el plano π contenga a la recta *r*, donde:

$$\pi \equiv ax + y + z = b, \quad r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1, \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Solución: Los valores buscados son $a = b = 1$

9. La Rioja Extraordinaria 2021. 7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(1,1,1)$,

b) es paralela al plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1 - 2\lambda, \end{cases}$

Solución: $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

10. La Rioja Extraordinaria 2021. 8.- (2 puntos) Calcular el valor del parámetro real *a* para que las rectas *r* y *s* se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x + z = a, \\ x + y = 2, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2z = 2a \end{cases}$$

Solución: Para a = –2 las rectas se cortan en el punto $P(0,2,-2)$

11. La Rioja Ordinaria 2021. 7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de una recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(0,1,1)$,

b) está contenida en el plano $\pi \equiv x + y + 3z - 4 = 0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = z + 3, \\ y = -z + 4 \end{cases}$

Solución: $s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}$

12. La Rioja Ordinaria 2021. 8.- (2 puntos) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$$

Solución: $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}$

13. La Rioja Extraordinaria 2020. 7.- (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+3y+z+1=0$.

Solución: $\pi' \equiv y-3z+10=0$

14. La Rioja Extraordinaria 2020. 8.- (2 puntos) Dados las rectas *r* y *s*:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 4x-2y+2z=10 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

y el plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$. Hallar la posición relativa entre

a) las rectas *r* y *s*.

b) el plano π y la recta *s*.

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) La recta "s" está contenida en el plano.

15. La Rioja Ordinaria 2020. 7.- (2 puntos) Determinar en función del parámetro real *a*, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} (a-1)x + \quad y - z = a, \\ (a+1)x + (2a+1)y + z = -a, \\ ax + \quad ay + z = -a. \end{cases}$$

Solución: Si $a \neq \pm 1$ *los tres planos se cortan en un punto P. Si* $a=1$ *o* $a=-1$ *los tres planos coinciden en una recta.*

16. La Rioja Ordinaria 2020. 8.- (2 puntos) Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(0,1,1)$.

a) Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución: a) $\vec{w} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *b)* $Área = \sqrt{3}\, u^2$

17. La Rioja Julio 2019. Propuesta A. 1.- (2 puntos) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45º. Dados los vectores $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2 + e_3$.

(I) Calcula el módulo de los vectores u y v.

(II) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores u y v.

Solución: (I) $|\vec{u}| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ *;* $|\vec{v}| = \sqrt{3-\sqrt{2}}$ *(II)* $\cos(u,v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{2}}}$

18. La Rioja Julio 2019. Propuesta B. 2.- (2 puntos) Dos vértices consecutivos de un rectángulo son P = (2,2,1) y Q = (0,0,–1) y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto A = (5,4,3).

(I) Determina la ecuación de la recta r.

(II) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

Solución: (I) $r:\begin{cases} x=5-2t \\ y=4-2t \\ z=3-2t \end{cases}$ *(II)* $\pi: y-z-1=0$

19. La Rioja Junio 2019. Propuesta A. 1.- (2 puntos) Dados la recta r y el plano π de ecuaciones:

$r:\begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$, $\pi \equiv ax+y+z-b=0$

(I) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r.
(II) Determina a y b para que r sea paralela al plano π.

Solución: (I) a = b = 1 (II) a=1 y b≠1.

20. La Rioja Junio 2019. Propuesta B. 1.- (2 puntos) Sean el plano $\pi \equiv 2x+y-z-3=0$ y la recta

$r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases}$

(I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto P=(1,2,–1), es perpendicular a la recta r y paralela al plano π.
(II) Halla la distancia de la recta s al plano π.

Solución: (I) $s:\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+7t \\ z=-1+3t \end{cases}$ *(II)* $\text{Distancia}(s,\pi)=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,u$

21. La Rioja Julio 2018. Propuesta A. 4.- (3 puntos)

Considere las rectas $r:\begin{cases} x-y+2z=7 \\ x-y-5z=-7 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=3+2t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$.

(I) Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
(II) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a *r*.

Solución: (I) Se cruzan (II) $\vec{u}=(a,-a,c)$

22. La Rioja Junio 2018. Propuesta A. 1.- (2 puntos) Sean los vectores $\vec{u}=(-1,4,8)$ y $\vec{v}=(1,2,-2)$.

(I) Demuestre que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es mayor que 90º.
(II) Calcule un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tenga módulo 1.

Solución: (I) El coseno del ángulo es negativo → es mayor de 90º (II) $\vec{w}=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{-\sqrt{2}}{6},\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)$

23. La Rioja Junio 2018. Propuesta B. 2.- (3 puntos) Sean el punto $P=(1,2,-2)$ y la recta

$r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$

(I) Determine la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta *r*.

(II) Determine el punto de r más próximo a P.
(III) Halle la recta r' simétrica de r respecto al punto P.

Solución: (I) $\pi \equiv -x+y+2z+3=0$ *(II)* $P'\left(\frac{7}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ *(III)* $r': \begin{cases} x=-\frac{1}{3}-\lambda \\ y=\frac{10}{3}+\lambda \\ z=-\frac{10}{3}+2\lambda \end{cases}$

24. La Rioja Julio 2017. Propuesta A. 1.- (2 puntos) Sean m un número real y los vectores

$$\vec{u}=(1,0,1),\ \vec{v}=(2,-1,m).$$

(I) Halle todos los vectores de módulo 3 que son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(II) Determine, si existe, un valor de m tal que el correspondiente vector $\vec{v}$ forma un ángulo de 45º con el vector $\vec{u}$.

Solución: (I) $\left(\frac{3}{\sqrt{m^2-4m+6}},\frac{6-3m}{\sqrt{m^2-4m+6}},\frac{-3}{\sqrt{m^2-4m+6}}\right)$ y también $\left(\frac{-3}{\sqrt{m^2-4m+6}},\frac{-6+3m}{\sqrt{m^2-4m+6}},\frac{3}{\sqrt{m^2-4m+6}}\right)$ (II) $m=\frac{1}{4}$

25. La Rioja Julio 2017. Propuesta B. 2.- (3 puntos)
(I) Pruebe que cualquiera sea el valor de a, los planos $\pi_1: ax+ay-z=0$, $\pi_2: x-y+az=0$ se cortan en una recta r.
(II) Estudie, en función de a, la posición relativa de la recta r y el plano que contiene a los puntos A(1, 1, 1), B(l, 0, 2) y C(0, 1, 2a).

Solución: (I) Los vectores normales a los planos no tienen coordenadas proporcionales en ningún caso.
(II) Para a ≠ –1 plano y recta se cortan. Para a = –1 recta y plano son paralelos.

26. La Rioja Junio 2017. Propuesta A. 1.- (2 puntos) Sean los puntos A(1,–1,0), B(2,2, 1**)**, C(1,–2,–1), D(0,–1,2).
(I) Halle una ecuación de la recta que pasa por A y por B.
(II) ¿Son coplanarios los puntos A(1,–1,0), B(2,2, 1**)**, C(1,–2,–1), D(0,–1,2)?

Solución: (I) $r: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ *(II) Los tres puntos A, B, C y D son coplanarios*

27. La Rioja Junio 2017. Propuesta B. 2.- (3 puntos) Dacios los vectores $\vec{u}=(2,-3,5)$, $\vec{v}=(1,2,-2)$, $\vec{w}=(2k,-1,k)$.
(I) Calcula el valor de k para que los vectores sean linealmente dependientes.
(II) Compruebe que para k = 2 los vectores forman una base del espacio euclídeo tridimensional.
(III) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}=(15,-11,18)$ respecto de la base del apartado anterior.

Solución: (I) k = –9 (II) $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=-11\neq 0$ *(III) Las coordenadas del vector* $\vec{a}=(15,-11,18)$ *en la base* $\left\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right\}$ *son* $\vec{a}=(2,-1,3)$

Madrid

1. Madrid Extraordinaria 2023. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean el plano $\pi: z=1$, los puntos P(1, 1, 1) y Q(0, 0, 1) y la recta *r* que pasa por los puntos P y Q.
a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.
b) (1 punto) Halle una recta paralela a *r* contenida en el plano $z = 0$.
c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta *r*, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Solución: a) P y Q tienen su 3º coordenada = 1. b) $s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$ *c)* $t:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1-\sqrt{2}\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$

2. Madrid Extraordinaria 2023. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados el plano $\pi: x+3y+2z+14=0$ y la recta $r\equiv\begin{cases} x=2 \\ z=5 \end{cases}$, se pide:
a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.
b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.
c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a *r*, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

Solución: a) $P(-1,-3,-2)$ b) $t:\begin{cases} x=-1-\alpha \\ y=-3-3\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R} \\ z=-2+5\alpha \end{cases}$ c) $t':\begin{cases} x=2\lambda \\ y=0 \\ z=-7-\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$

3. Madrid Ordinaria 2023. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean los puntos A(1,−2, 3), B(0, 2,−1) y C(2, 1, 0). Se pide:
a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo *T* y hallar una ecuación del plano que los contiene.
b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano *z = 1*.
c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

Solución: a) Los vectores $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AC}$ *no indican la misma dirección.* $\pi: y+z-1=0$.

b) $P\left(\frac{1}{2},0,1\right)$ *c)* $Perímetro=\sqrt{33}+\sqrt{19}+\sqrt{6}\simeq 12.55$ *unidades.*

4. Madrid Ordinaria 2023. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi: x-z=2$ y el punto A(1, 1, 1), se pide:
a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de *r* y π y calcular su intersección, si existe.
b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.
c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta *r*.

Solución: a) Plano y recta son secantes y se cortan en el punto $P(1,0,-1)$. *b)* $A'(2,1,0)$

c) $A'=\left(\frac{-1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-5}{3}\right)$

5. Madrid Extraordinaria 2022. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos A(0,−1, 0) y B(0, 1, 0) pertenecientes al plano π.
a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices {A, B, C, D} que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.
b) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

Solución: a) Hay dos soluciones posibles: $C\left(\sqrt{2},1,\sqrt{2}\right)$ *y* $D\left(\sqrt{2},-1,\sqrt{2}\right)$ *o* $C\left(-\sqrt{2},1,-\sqrt{2}\right)$ *y* $D\left(-\sqrt{2},-1,-\sqrt{2}\right)$ *b)* $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *y* $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. Madrid Extraordinaria 2022. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 5+2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$.
a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.
b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas *r* y *s*.
c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas *r* y *s*, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación *z = 0*. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

Solución: a) Son paralelas. $d(r,s) = \sqrt{41} \simeq 6.4u$ *b)* $\pi \equiv 2x - y + 6z + 1 = 0$ *c)* $t \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = 5+6\lambda, \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

7. Madrid Ordinaria 2022. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Con un dispositivo láser situado en el punto P (1, 1, 1) se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.
a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de *r* y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano *z = 0*.
b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.
c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta *r*.

Solución: a) $\vec{v_r} = (1,2,1)$; Q(–90, –190, 0) b) P´(–11, –32, 79) c) 60º

8. Madrid Ordinaria 2022. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$ y el punto *P(0, 1, 0)*.
a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.
b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.
c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

Solución: a) Cierto b) $s:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}$ *c)* $r_2\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=0\end{cases}$. *El área del cuadrado es* $\frac{3}{2}u^2$

9. Madrid Extraordinaria 2021. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r\equiv x-1=y+1=\frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi\equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto *A*.
b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta *r* y el plano π.
c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta *r* y no corta al plano π.

Solución: a) $(\pi,\pi')=90^{\circ}$ *b)* $d(r,\pi)=\frac{8}{\sqrt{3}}u$ *c)* $s\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{0}$

10. Madrid Extraordinaria 2021. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dadas las rectas

$$r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+4}{-3},\qquad s\equiv\begin{cases}x+z=2\\ -2x+y-2z=1\end{cases}.$$

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a *r* y a *s*.
b) (1 punto) Calcule la distancia entre *r* y *s*.

Solución: a) $t\equiv\begin{cases}7x-4y+z-14=0\\ x-y+z+3=0\end{cases}$ *b)* $d(r,s)=\frac{16}{\sqrt{6}}u$

11. Madrid Ordinaria 2021. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r\equiv\begin{cases}-x-y+z=0\\ 2x+3y-z+1=0\end{cases}$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z+3=0$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman *r* y π.
b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta *r* y el plano π con respecto al plano $z-y=0$.
c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta *r* sobre el plano π.

Solución: a) El ángulo que forman recta y plano es de 19.5º b) $P'=(-3,-2,1)$ *c)* $r'\equiv\begin{cases}y+z+1=0\\ 2x+y-z+3=0\end{cases}$

12. Madrid Ordinaria 2021. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean los planos $\pi_1\equiv x+y=1$ y $\pi_2\equiv x+z=1$.

a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto (0, 2, 0) y es perpendicular al plano π_2.
c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes *x* e *y*.

Solución: a) $\pi_3\equiv x+y=2\sqrt{2}$ *y* $\pi_4\equiv x+y=-2\sqrt{2}$ *b)* $r\equiv\frac{x}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$ *c)* $d(A,B)=\sqrt{2}\,u$

13. Madrid Extraordinaria 2020. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto *P(3, 3, 0)* y la recta $r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.
b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.
c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

Solución: a) $\pi \equiv x+y-4z-6=0$ *b)* $P'(-1,-1,-2)$ *c)* $A(1,1,-1)$ *y* $B(2,0,-1)$; $A(1,1,-1)$ *y* $B(0,2,-1)$

14. Madrid Extraordinaria 2020. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Del paralelogramo *ABCD*, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, –1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, –2). Se pide:
a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento *AC* y es perpendicular a los segmentos *AC* y *BC*.
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice *D* y el área del paralelogramo resultante.
c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x=\frac{5}{2}-\lambda \\ y=\frac{3}{2}+\lambda \\ z=-\frac{3}{2} \end{cases}$ *b)* $D=(3,2,-3)$; Área$=\sqrt{32}=5,66\,u^2$ *c)* $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{19}}=0,66$

15. Madrid Ordinaria 2020. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$
se pide:
a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta *r* y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.
c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta *r* que contiene a la recta *s*.

Solución: a) Se cruzan b) $\pi \equiv x+y+3z-16=0$ *c)* $\pi' \equiv -4x-5y+3z-24=0$

16. Madrid Ordinaria 2020. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados los puntos P(–3, 1, 2) y Q(–1, 0, 1) y el plano π de ecuación $x+2y-3z=4$, se pide:
a) (1 punto) Hallar la proyección de *Q* sobre π.
b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto *P*.
c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos *P* y *Q*.

Solución: a) $Q'\left(\frac{-3}{7},\frac{8}{7},\frac{-5}{7}\right)$ *b)* $x+2y-3z=-7$ *c)* $\pi' \equiv x+y+z=0$

17. Madrid Julio 2019. Opción A. Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados los puntos A(1, 1, 1), B(1, 3,–3) y C(–3,–1, 1), se pide:
a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.
b) (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.
c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Solución: a) $-x+2y+z-2=0$ *b) Cualquier punto del plano anterior. c)* $P\left(-\frac{11}{4},0,0\right)$ *y* $P'\left(-\frac{5}{4},0,0\right)$

18. Madrid Julio 2019. Opción B. **<u>Ejercicio 3</u>** : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi\equiv 2x+3y-z=4$, y las rectas $r\equiv\begin{cases}x+y-z=0\\x+y+z=2\end{cases}$ y $s\equiv(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,0,1)$, con λ∈ R, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P(1, 2, 3) respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Solución: a) $P'=\left(\frac{5}{7},\frac{11}{7},\frac{22}{7}\right)$ *b)* $t\equiv\begin{cases}x=-1+2\lambda\\y=2+3\lambda\\z=1-\lambda\end{cases}$ *c) 60º*

19. Madrid Junio 2019. Opción A. **Ejercicio 3**: **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=z$ y la recta s que pasa por el punto (2;–5; 1) y tiene dirección $(-1;0;-1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución: a) Las rectas se cruzan b) $\pi\equiv 2x+y-2z-5=0$ *c)* $\pi\equiv 2x-2y+z=0$

20. Madrid Junio 2019. Opción B. **Ejercicio 3** : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto A(2; 1; 0) y el plano $\pi\equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Solución: a) $d(A;\pi)=\sqrt{29}\,u$ *b)* $B(4,4,4)$ *c)* $A'=(6,7,8)$

21. Madrid Julio 2018. A.3. Se consideran los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$; $\vec{u}=(2,0,-1)$ y el punto $A(-4,4,7)$. Se pide:

a) (1 pto) Determinar un vector $\overrightarrow{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.

b) (0.75 ptos) Hallar un vector no nulo $\overrightarrow{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

c) (0.75 ptos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overline{OA}$.

Solución: a) $\overrightarrow{w_1}=\left(\frac{-2}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}},\frac{-4}{3\sqrt{5}}\right)$ *b)* $\overrightarrow{w_2}=(1,2,2)$ *c) C(2,4,6) y D(–2,0,1)*

22. Madrid Julio 2018. B.3. Dados el punto P(0; –1; 1) y la recta *r*, que pasa por el punto $Q(1;\ 0;\ 1)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(0,1,2)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a *r* y pasa por P.

b) (0.5 puntos) Encontrar el punto S contenido en *r* tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta *r*.

c) (1.5 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1; T_2, contenidos en la recta *r*, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.

Solución: a) $2x-2y+z-3=0$ *b)* $S\left(1,\frac{-1}{5},\frac{3}{5}\right)$ *c) Área=1,51* u^2

23. Madrid Junio 2018. Opción A. Ejercicio 3: Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$, $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$, se pide:
a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.
b) (1.5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con A(2, 1, 3) y B(1, 2, 3), calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$.

Solución: a) Volumen del cubo es $\frac{729}{2744}u^3$ *b)* $C(2,3,3)$ *y* $D(3,2,3)$

24. Madrid Junio 2018. Opción B. Ejercicio 3: Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados el punto P(1, 1, 1) y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1/3}$ se pide:
a) (1 punto) Hallar la distancia del punto *P* a la recta *r*.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
c) (0.5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta *s* y que pasa por el punto *P*.

Solución: a) $d(P,r)=\sqrt{\frac{13}{15}}=0,93\,u$ *b) Las rectas se cruzan c)* $\pi \equiv -3x+3y+z-1=0$

25. Madrid Septiembre 2017. Opción A. Ejercicio 2: Calificación máxima: 3 puntos.
Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x-y-z=1, \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x-5y-2z=3, \\ 3x+y+4z=3 \end{cases}$ se pide:
a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2.
b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.
c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y el punto P(1, 2, 3).

Solución: a) Se cruzan. *b)* $\text{Distancia}(r_1,r_2)=\frac{\sqrt{6}}{6}u$ *c)* $\pi \equiv 6x-y-z-1=0$

26. Madrid Septiembre 2017. Opción B. Ejercicio 3: Calificación máxima: 2 puntos.
Sea *r* la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$, se pide:
a) (1 punto) Hallar la distancia del punto Q(3,5,–3) a la recta *r*.
b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta *r* con el plano perpendicular a *r* que pasa por el punto *Q*.

Solución: a) $\text{Distancia}(Q,r)=\sqrt{12}\,u$ *b)* $Q'(1,3,-1)$

27. Madrid Septiembre 2017. Opción B. Ejercicio 4: Calificación máxima: 2 puntos.
Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,3,–1), B(3,1 ,0) y C(2,5,1) y se pide:
a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

Solución: a) Tiene dos lados iguales b = c y el tercero desigual, por lo que es un triángulo isósceles
b) Los ángulos son de 90º, 45º y 45º

28. Madrid Junio 2017. Opción A. Ejercicio 2: Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos $P(1,-2,1)$, $Q(-4,0,1)$, $R(-3,1,2)$, $S(0,-3,0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta *r*, que pasa por los puntos P y Q, y la recta *s*, que pasa por R y S.
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Solución: a) $\pi \equiv 2x+5y-7z+15=0$ *b) Las rectas se cortan c) Área triángulo PQR* $=\dfrac{\sqrt{78}}{2}=4,41\,u^2$

29. Madrid Junio 2017. Opción B. **<u>Ejercicio 3</u>: Calificación máxima:** 2 puntos.

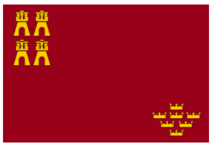
a) (1 punto) Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x=y=z \quad y \quad r_2 \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$$

b) (1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x=2-y=z-1$ con el plano perpendicular a *s*, que pasa por el origen.

Solución: a) $d(r_1,r_2)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0,707\,u$ *b)* $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

Murcia



1. Murcia Extraordinaria 2023. 5: Los puntos $A=(6,-4,4)$ y $B=(12,-1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es la proyección ortogonal del vértice A sobre la recta

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ x+2z=5 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice C.

b) **[0,5 p.]** Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A.

c) **[0,5 p.]** Calcule el área del triángulo ABC.

Solución: a) $C(3,-1,1)$ *b) Se cumple y por tanto en el vértice A tenemos un ángulo de 90º.*

c) $\text{Área } ABC=\dfrac{27\sqrt{2}}{2}\simeq 19.09\ u^2$

2. Murcia Extraordinaria 2023. 6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 2x+ay-2z=-4$ y la recta *r* dada por

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-2}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro *a*.

Se sabe que cuando *a = 1* la recta *r* corta al plano π. Para ese valor de *a*:

b) **[0,75 p.]** Calcule el punto de corte de la recta *r* y el plano π.

c) **[0,5 p.]** Calcule el ángulo que forman.

Solución: a) Si $a=-8$ *la recta está contenida en el plano y si* $a\neq -8$ *recta y plano son secantes, coinciden en un punto* *b) El punto de corte de recta y plano es el punto A(1, 0, 3).*
c) Recta y plano forman un ángulo de 90º

3. Murcia Ordinaria 2023. 5: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \text{ y } s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **[1 p.]** Compruebe que el punto $P=(7,1,-1)$ está en la recta *r* y calcule su proyección ortogonal sobre la recta *s*.

c) **[0,5 p.]** Calcule la distancia entre ambas rectas.

Solución: a) Las rectas son paralelas. *b) El punto P pertenece a la recta r.* $P'(10,-2,2)$

c) $d(r,s)=d(P,P')=3\sqrt{3}\simeq 5.196u$

4. Murcia Ordinaria 2023. 6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 3x-y-2z=5$ y la recta *r* dada por

$$r: \frac{x-a}{1} = \frac{y-3+a}{1} = \frac{z}{1}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro *a*.

Se sabe que cuando *a = 0* la recta *r* es paralela al plano π. Para ese valor de *a*:

b) **[0,75 p.]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano π.
c) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta *r* y es paralelo al plano π.

Solución: a) Si $a = 2$ *la recta está contenida en el plano. Si* $a \neq 2$ *la recta es paralela al plano. b)* $d(r,\pi) = \frac{8}{\sqrt{14}} \simeq 2.138u$ *c)* $\pi': 3x - y - 2z + 3 = 0$.

5. Murcia Extraordinaria 2022. 5: Considere el plano π de ecuación $\pi: x + y + z = 1$ y la recta *r* dada por

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ ax - z = a - 1 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro *a*.
b) **[1 p.]** Si a = –1 la recta *r* corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta *r* con el plano π.

Solución: a) Si $a = -2$ *recta y plano son paralelos. Si* $a \neq -2$ *recta y plano son secantes.*
b) A(–1, –1, 3) El ángulo entre recta y plano es 19.48º

6. Murcia Extraordinaria 2022. 6: Considere las recta r y s dadas por

$$r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad y \quad s: \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.
b) **[1 p.]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano $\pi: x - y + 2z = 3$.

Solución: a) $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = 0 \quad \pi: x - y + 2z = 1$ b) $d(r,\pi) = \frac{2}{\sqrt{6}}u$

7. Murcia Ordinaria 2022. 5: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

a) **[1,5 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.
b) **[1 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución: a) Las rectas se cortan (están en un mismo plano) b) $\pi: x + y - z - 1 = 0$. *Las rectas forman un ángulo de 60º*

8. Murcia Ordinaria 2022. 6: Considere los puntos $A = (1, -1, 2)$ y $B = (3, 5, 2)$.

a) **[1,5 p.]** Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.
b) **[1 p.]** Calcule la distancia del punto A al plano π.

Solución: a) $\pi : x+3y-8=0$ *b)* $d\left(A,\pi\right)=\sqrt{10}\,u$

9. Murcia Extraordinaria 2021. 5: Considere las rectas de ecuaciones

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}.$$

c) **[0,75 p.]** Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.
d) **[1 p.]** Determine el ángulo que forman las dos rectas.
e) **[0,75 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

Solución: a) El punto de corte de las rectas es $C(3,2,-1)$ *b) 19º. c)* $\pi \equiv y+z-1=0$

10. Murcia Extraordinaria 2021. 6: Los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta *r* dada por

$$r:\begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta *r* es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

b) **[1 p.]** Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

Solución: a) El punto C tiene coordenadas $C(6,0,3)$ *b)* $\acute{A}rea=32.5\,u^2$

11. Murcia Ordinaria 2021. 5: Considere los planos de ecuaciones
$\pi_1 : x-y+z=0$ *y* $\pi_2 : x+y-z=2$.

a) **[1 p.]** Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta *r* determinada por la intersección de ambos planos.
b) **[1,5 p.]** Compruebe que el punto A = (3, 2, 1) no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta *r* y pasa por el punto *A*.

Solución: a) $r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$ *b)* $\pi_3 : y-z-1=0$

12. Murcia Ordinaria 2021. 6: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes. Considere los puntos *A = (a, 4, 3), B = (0, 0, 5)* y *C = (0, 3, –1).*

a) **[1 p.]** Calcule los valores de *a* para los cuales el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice *A*.
b) **[1,5 p.]** Tomando el valor de *a = 3*, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos *A* y *B* y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.

Solución: a) $a=\pm 2$ b) $\pi : -16x+7y-10z+50=0$

13. Murcia Extraordinaria 2020. 5: Considere los puntos $P=(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$, y la recta

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}.$$

a) **[1,5 p.]** Determine el punto *R* de la recta *r* para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.
Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r.

Solución: a) $R_1(0,1,-1)$ *y* $R_2(2,3,7)$ *b)* $s:\begin{cases} x=5+2t \\ y=6+2t \\ z=1-t \end{cases}$ *Las dos rectas se cortan en el punto A(1,2,3) y el producto escalar de sus vectores directores es cero:* $\vec{v_s}\cdot\vec{v_r}=0$

14. Murcia Extraordinaria 2020. 6: Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 5x+3y=19 \\ y-5z=3 \end{cases} \qquad s:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,25 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $\pi:-x-y+2z+5=0$

15. Murcia Ordinaria 2020. 5: Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. .

a) **[1,5 p.]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A(-1,2,3)$, $B(3,-4,1)$ y $C(1,-4,5)$.

b) **[1 p.]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución: a) Por A → $r:\left.\begin{matrix} x=-1+\alpha \\ y=2-2\alpha \\ z=3 \end{matrix}\right\}$ *Por B →* $s:\left.\begin{matrix} x=3-\beta \\ y=-4+\beta \\ z=1+\beta \end{matrix}\right\}$ *Por C →* $s':\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=-4+t \\ z=5-t \end{matrix}\right\}$

b) Las tres medianas se cortan en el punto $M(1,-2,3)$.

16. Murcia Ordinaria 2020. 6: Considere la recta r y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0} \qquad \pi:x-2y-z=4$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) **[0,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) **[1 p.]** Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución: a) Recta y el plano son paralelos b) $d(r,\pi)=4.08\,u$ *c)* $\pi'\equiv -x+2y-5z=0$

17. Murcia Septiembre 2019. A.3: Considere la recta $r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ y el plano $\pi:x-2y-z=-1$.

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) **[1,5 p.]** En el caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

Solución: a) Recta y plano se cortan perpendicularmente. b) El punto de corte es $P(-2,-1,1)$. *El ángulo que forman recta y plano es de 90º.*

18. Murcia Septiembre 2019. B.3: Los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice *C* está contenido en la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z=1$

a) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano π.

b) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *C* sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución: a) $r: \left.\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{array}\right\}$ *b) El punto C puede tener las coordenadas C(13, –5, 7) o bien C(–11, 7, –5).*

19. Murcia junio 2019. A.3: Los puntos $A=(3,0,0)$, $B=(0,3,0)$ y $C=(0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice *D* está contenido en la recta ***r*** que pasa por el punto $P=(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

a) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano π que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

b) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P=(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

c) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *D* sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

Solución: a) $\pi: x+y+z-3=0$ *b)* $r: \left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{array}\right\}$ *c)* $D(5,5,5)$ *o* $D(-3,-3,-3)$

20. Murcia junio 2019. B.3: Considere las siguientes rectas:

$r: \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ $\qquad$ $s: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,5 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $t: \left.\begin{array}{r} -x-y+2z+13=0 \\ x+y+2z+1=0 \end{array}\right\}$ *o en paramétricas* $t: \left.\begin{array}{l} x=3,5-t \\ y=2,5+t \\ z=-3,5 \end{array}\right\}$

21. Murcia Septiembre 2018. CUESTIÓN A.4:
Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$r: \begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+3y+5z=1 \end{cases}$ y $s: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$

a) [1,25 p.] Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) [1,25 p.] Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a ambas rectas.

Solución: a) El vector director de las rectas son proporcionales y el punto $P_s(5,0,0)$ *que pertenece a la recta s no pertenece a la recta r. b)* $\left.\begin{array}{l} x=5+2\lambda-\frac{25}{7}\alpha \\ y=0+\lambda-\frac{1}{7}\alpha \\ z=0-\lambda \end{array}\right\}$

22. Murcia Septiembre 2018. CUESTIÓN B.4:
Considere los puntos $P=(1,\ 1,\ 3)$ y $Q=(1,\ 5,\ 0)$ y la recta r dada por la ecuación:

$$r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\-x+y\qquad=4\end{cases}$$

a) [0,5 p.] Compruebe que el punto P no está en la recta r y que el punto Q si lo está.
b) [1,25 p.] Determine el punto R de la recta r tal que el triángulo PQR sea un triángulo rectángulo en P (es decir, con ángulo recto en el vértice P).
c) [0,75 p.] Calcule el área de dicho triángulo PQR.

Solución: a) Muy sencillo b) $R=(-9,-5,-5)$ *c)* $\acute{A}rea=25\sqrt{2}\ u^2$

23. Murcia junio 2018. CUESTIÓN A.4:
Considere el plano π dado por la ecuación $3x-2y+z=3$.

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta ***r*** dada por

$$r:\begin{cases}x+3y+3z=0\\y+2z=1\end{cases}$$

b) **[1,25 p.]** En caso de que la recta ***r*** sea paralela al plano, calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta ***r*** corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

Solución: a) La recta es perpendicular al plano. b) Forman 90º ya que son iguales el vector normal del plano y el director de la recta. El punto de corte es A(0, -1, 1)

24. Murcia junio 2018. CUESTIÓN B.4:
Considere el punto $P=(0,\ 1,\ 2)$ y la recta ***r*** dada por la ecuación:

$$r:\begin{cases}2x+y-z=-1\\x-y+z=3\end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que es perpendicular a la recta ***r*** y pasa por el punto ***P***.
b) **[1,25 p.]** Calcule la distancia del punto ***P*** al plano $x+y+z=5$.

Solución: a) $y+z-3=0$ *b)* $\text{Distancia}(P,\text{Plano})=1{,}15\ u^2$

25. Murcia Septiembre 2017. CUESTIÓN A.2: Considere la recta *r* que pasa por los puntos A = (1, 1, 1) y B = (3, 3, 4) y la recta *s* cuyo vector director es $\vec{v}=(-1,3,1)$ y pasa por el punto C = (4, 0, 3).

a) **[1 punto]** Determine las ecuaciones continuas de las rectas *r* y *s*.
b) **[1,5 puntos]** Estudie la posición relativa de *r* y *s*.

Solución: a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ *y* $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-3}{1}$ *b) Las rectas se cortan.*

26. Murcia Septiembre 2017. CUESTIÓN B.2: Considere los puntos A = (1, 1, 1), B = (1, –1, 0) y C = (0, –2, 1).

a) **[1,25 puntos]** Calcule el área del triángulo *ABC*.
b) **[1,25 puntos]** Calcule la ecuación de la recta (en cualquiera de sus formas) contenida en el plano que forman *A*, *B* y *C* que, pasando por *A*, es perpendicular al lado *BC*.

Solución: a) $\acute{A}rea=\frac{\sqrt{14}}{2}u^2$ *b)* $r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{4}$

27. Murcia junio 2017. CUESTIÓN A.2: Considere el plano π que pasa por el punto P(1, 2, 3) y tiene como vectores directores a $\vec{u}=(1,-1,0)$ y $\vec{v}=(1,0,2)$. Considere la recta ***r*** que pasa por los puntos A(1,0,4) y B(3,2,2).

a) **[0’75 puntos]** Determine la ecuación de π.

b) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación de ***r***.

c) **[1 punto]** Estudie la posición relativa de π y ***r***.

Solución: a) $\pi:-2x-2y+z+3=0$ *b)* $\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{-1}$ *c) Son secantes.*

28. Murcia junio 2017. CUESTIÓN B.2: Los vértices del triángulo ABC son A = (–a, 1, 1), B = (2, –1, 2) y C = (1, –2a, 3).

a) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto ha de valer *a* para el triángulo sea rectángulo en B?

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo ABC para el caso a = –1.

Solución: a) a = 1 *b)* $\text{Área triángulo } ABC=\frac{\sqrt{30}}{2}u^2$

Navarra

1. Navarra Extraordinaria 2023. P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3,-2,3)$ y que corta a las rectas *r* y *s*, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+3}{1}$$

(2.5 puntos)

Solución: $t \equiv \frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$

2. Navarra Extraordinaria 2023. P4) Halla el plano paralelo a *r* y *s* que se encuentra a *3u* de *r* y *6u* de *s* siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y+2z+7=0 \\ 5x+2y+2z-2=0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-5}{-1}.$$

(2,5 puntos)

Solución: $\pi : -x+2y-2z-1=0$

3. Navarra Ordinaria 2023. P3) Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a *r* y *s* que corta a ambas, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ x-3y+3z-8=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-0}{-2}$$

(2.5 puntos)

Solución: $t \equiv \frac{x+1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$

4. Navarra Ordinaria 2023. P4) Sean $P(1,5,-1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+4}{2}$.

a) Calcula el punto $Q \in r$ tal que la distancia de P a Q sea mínima. (1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a *r* tales que $d(P,Q_1)=d(P,Q_2)=3\sqrt{2}$: (1,25 puntos)

Solución: a) $Q(3,3,-2)$ *b) Los puntos buscados son* $Q_1(1,2,-4)$ *y* $Q_2(5,4,0)$

5. Navarra Extraordinaria 2022. P3) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x-y-z-1=0$, sabiendo que contiene al punto P (–1, 2, 1) y que la intersección de ambos planos es paralela a la siguiente recta:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2z-3=0 \\ y-z-3=0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

Solución: $\pi \equiv y-z-1=0$

6. Navarra Extraordinaria 2022. P4) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x-y+z-6=0 \\ x-y+3z-8=0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x+2y-z-7=0$ (2.5 puntos)

Solución: Los dos puntos buscados son A(3, 7, 4) y B(1, –1, 2)

7. Navarra Ordinaria 2022. P3) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $T \equiv (1,-5,3)$ y corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{1} \qquad \text{(2.5 puntos)}$$

Solución: $t \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}$

8. Navarra Ordinaria 2022. P4) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (1,2,-1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x-y+z=0$ y corta a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x-y+2z+2=0 \\ 3x-y-z-3=0 \end{cases} \qquad \text{(2.5 puntos)}$$

Solución: $s: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{8}=\frac{z+1}{2}$

9. Navarra Extraordinaria 2021. P3) Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-6}{-1}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-2}{2} \qquad \text{(2.5 puntos)}$$

Solución: $t \equiv \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$

10. Navarra Extraordinaria 2021. P4) Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro (0,0,0), y que corte perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+4}{-2}$$

Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a *r*. (2.5 puntos)

Solución: Hay dos planos como solución de esta situación: $\pi_1 \equiv 2x+y-2z+9=0$ *y* $\pi_2 \equiv 2x+y-2z-9=0$.

$T_1(-2,-1,2)$ *y* $T_2(2,1,-2)$ *y las rectas* $s_1 \equiv \frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{0}$ *y* $s_2 \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{0}$

11. Navarra Ordinaria 2021. P3) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+2}{1}$$

y equidista de ambas. (2.5 puntos)

Solución: $\pi \equiv x-2y+3z+6=0$

12. Navarra Ordinaria 2021. P4) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos A (–1, –2, 3) y *B* (2, –2, –1) . Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 u. (2.5 puntos)

Solución: Hay dos soluciones al problema: $C=(4,-1,-3);\quad D(1,-1,1)$ *y* $C=(0,-3,1);\quad D(-3,-3,5)$

13. Navarra Extraordinaria 2020. P2) El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ y $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección. (2.5 puntos)

Solución: $Radio = 2\sqrt{6}$ *y el punto tiene coordenadas* $P(2,-3,-1)$

14. Navarra Extraordinaria 2020. P6) Calcula la ecuación continua de la recta *t* sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x+3z-7=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$$ (2.5 puntos)

Solución: $t \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-5}$

15. Navarra Ordinaria 2020. P2) Calcula la ecuación continua de una recta *r* sabiendo que corta a la recta

$s \equiv \begin{cases} 3x+y-z-7=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$, es paralela al plano de ecuación $\pi \equiv 2x-y+3z-6=0$ y pasa por el punto $P \equiv (-1,3,1)$. (2.5 puntos)

Solución: $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}$

16. Navarra Ordinaria 2020. P6) Los puntos $A \equiv (-1,2,1)$ y $B \equiv (2,5,1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4}$$ (2.5 puntos)

Solución: C(1, 3, 3) y *D(0, 4, –1)*

17. Navarra Julio 2019. A2) Los puntos A ≡ (2, –3, 2) y B ≡ (0, 1, –2) determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale 18 u^2

Solución: $C \equiv (5,3,2)$

18. Navarra Julio 2019. B2) Calcula la ecuación continua de la recta *t* sabiendo que pasa por el punto P ≡ (1,–2, -1) y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x+y-z-1=0 \\ 3y-2z+3=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$ (3 puntos)

Solución: $t \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z+1}{-8}$ *o* $t \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-17} = \frac{z+1}{-26}$

19. Navarra Junio 2019. A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-2z-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta *r* y que diste de *s* 3 unidades. (2 puntos)

Solución: $\pi \equiv 2x+y-2z+14=0$ *o bien* $\pi \equiv 2x+y-2z-4=0$

20. Navarra Junio 2019. B2) $P\equiv(1,-1,1)$, $Q\equiv(5,-3,5)$, $R\equiv(7,-7,1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo. (3 puntos)

Solución: Depende de hacia qué lado construyas el cubo el centro es uno de estos puntos: $O(6,-2,0)$ *u* $O'(2,-6,2)$

21. Navarra Julio 2018. A2) Halla el simétrico del punto $P\equiv(2,5,2)$ respecto de la recta $r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ (2 puntos)

Solución: P´(0, –3, 0)

22. Navarra Julio 2018. B2) Halla la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x+y+z-3=0\\2x+z-5=0\end{cases}\quad \textbf{y}\quad s\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{1}\qquad \text{(3 puntos)}$$

Solución: $t\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$

23. Navarra Junio 2018. A2) Sean los puntos P(7,4,2), Q(1,2,–2) y R(2,1,–3). Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, dos vértices. Halla los otros dos vértices restantes. (2 puntos)

Solución: S(0, 3, –1) y T(–5, 0, –6)

24. Navarra Junio 2018. B2) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(–4,0,5) y corta a las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x+y+z-1=0\\x+y+1=0\end{cases}\quad \text{y}\quad s\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}\qquad \text{(3 puntos)}$$

Solución: $t\equiv\frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-3}$

25. Navarra Julio 2017. A2) Comprueba que las rectas

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2}\quad \text{y}\quad s\equiv\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}$$

se cortan perpendicularmente y halla el punto de corte, P. Encuentra un punto $R\in r$ y un punto $S\in s$ de forma que P, R, S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3. (2 puntos)

Solución: Se cortan perpendicularmente pues se cortan en P(2, 1, –1) y el producto escalar de sus vectores directores es 0. R(3, 3, –3) y S(4, 2, 1)

26. Navarra Julio 2017. B2) A, B y C son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi\equiv 4x+2y+z-4=0$.

Encuentra un punto, D, de la recta $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-3}{-1}$ tal que A, B, C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen 6 u^3. (3 puntos)

Solución: Hay dos soluciones: D(–3, 3, 7) o D(–1, 3, 5)

27. Navarra Junio 2017. A2) Dados el punto P (1, –1, 0) y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2. (2 puntos)

Solución: Hay dos soluciones posibles: $\pi \equiv 2x - y - 2z + 3 = 0$ *o* $\pi \equiv 2x - y - 2z - 9 = 0$

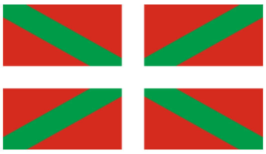
28. Navarra Junio 2017. B2) Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(–4, 2, 0) y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3}$$

(3 puntos)

Solución: $t \equiv \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$

País Vasco



1. País vasco Extraordinaria 2023. Ejercicio A2

Solución:

2. País vasco Extraordinaria 2023. Ejercicio B2

Solución:

3. País vasco Ordinaria 2023. Ejercicio A2

Sea *r* la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases},$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*(2, 1, 0), que es exterior a *r*.

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ *b)* $s \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

4. País vasco Ordinaria 2023. Ejercicio B2

Sean *r* la recta cuya ecuación continua es: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x+y+z=1$ y $\pi_2 \equiv x+y-z=1$. P_1 el punto de corte de la recta *r* con el plano π_1 y P_2 el punto de corte de la recta *r* con el plano π_2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P_1 y P_2;

b) la distancia entre los puntos P_1 y P_2;

c) la distancia del punto P_1 al plano π_2.

Solución: a) $P_1(0,2,-1)$ y $P_2(1,1,1)$ b) $d(P_1,P_2)=\sqrt{6}$ *unidades* c) $d(P_1,\pi_2)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ *unidades*

5. País vasco Extraordinaria 2022. Ejercicio A2

Sea la recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} 3x+\alpha y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases},$$

¿Existe algún valor de α para el cual el plano $\pi \equiv x+y+z=1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.

Solución: No existe ningún valor de α para el cual la recta esté contenida en el plano

6. País vasco Extraordinaria 2022. Ejercicio B2

Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

¿Existe algún valor de *s* tal que el punto *(−3, s, s)* pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

Solución: $r \equiv x = -\frac{3}{4}t;\ y = \frac{5}{4}t;\ z = t;\ t \in \mathbb{R}$ *No existe ningún valor de s tal que el punto (−3, s, s) pertenezca a la recta*

7. País vasco Ordinaria 2022. Ejercicio A2

Se consideran la recta *r* cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases},$$

y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta *r* tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

Solución: Los puntos que cumplen lo planteado son dos: $P\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3}, \frac{-6+2\sqrt{15}}{3}, 0\right)$ *y* $P\left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3}, \frac{-6-2\sqrt{15}}{3}, 0\right)$

8. País vasco Ordinaria 2022. Ejercicio B2

Sean el punto $P = (1, 2, a)$, donde $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 3$. Halla las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto al plano π.

Solución: El punto P´ buscado es $P' = \left(1 - \frac{2a}{3}, 2 - \frac{2a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$

9. País vasco Extraordinaria 2021. Ejercicio A2

Sea *r* la recta de ecuaciones paramétricas

$$\{x = t,\ \ y = 2 + 2t,\ \ z = 1 + 3t\}$$

y sean $A = (1,2,3)$ y $B = (3,2,1)$. Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta *r* y que pasa por los puntos *A* y *B*. Calcular la distancia de la recta *r* a ese plano.

Solución: $\pi : x - 2y + z = 0$ $\qquad D(r,\pi) = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.22\,u$

10. País vasco Extraordinaria 2021. Ejercicio B2

Sean los puntos *A = (0, 2, 1)*, *B = (1, b, 0)*, *C = (–1, 0, 2)* y *D = (1, 1, 1)*.

a) Calcular el valor de *b* para que *A*, *B*, *C* y *D* estén en el mismo plano.

b) El plano que contiene a los puntos *A*, *B*, *C* y *D* es perpendicular al segmento *PQ* y lo divide en dos partes iguales. Si *P = (1, 2, –3)*, calcular las coordenadas de *Q*.

Solución: a) b = 4 b) Q(3, 4, 3).

11. País vasco Ordinaria 2021. Ejercicio A2 Sea *r* la recta que pasa por los puntos $A = (1, a, -1)$ y $B = (b, 1, 1)$ y π el plano de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

a) Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que la recta *r* sea perpendicular al plano π.

b) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r esté contenida en el plano π.

Solución: a) a = 2 y b = 0 b) a = –5 y b = –1

12. País vasco Ordinaria 2021. Ejercicio B2 Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P=(-2,1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\{x=1-2t,\ y=1+t,\ z=t\}$$

Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

Solución: $Dis\tan cia(P,C)=\sqrt{3}\ u$

13. País vasco Extraordinaria 2020. Ejercicio A2. Dada la recta $r=\begin{cases}3x+y-z=2\\2x+y+4z=1\end{cases}$, y el plano $\pi=3x+(\alpha+1)(y+1)+\alpha z=1$,

c) hallar ∝ para que la recta y el plano sean paralelos,

d) determinar si el punto $P=(1,1,2)$ pertenece al plano hallado en a).

Solución: a) $\alpha=\frac{1}{13}$ *b) No pertenece al plano*

14. País vasco Extraordinaria 2020. Ejercicio B2. Hallar el punto Q, simétrico de $P=(1,2,3)$ respecto al plano de ecuación $x+y+z=0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.

Solución: $Q(-3,-2,-1)$

15. País vasco Ordinaria 2020. Ejercicio A2.

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (–1, 2, 3) y es paralelo a los vectores $\vec{v}=(-1,-2,-3)$ y $\vec{w}=(1,3,5)$

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax-y+5z=8$ sean perpendiculares.

Solución: a) $\pi\equiv -x+2y-z-2=0$ *b)* $A=-7$

16. País vasco Ordinaria 2020. Ejercicio B2.

Sea π el plano $2x-y+Az=0$. Sea r la recta dada por $r\equiv\begin{cases}4x-3y+4z=-1\\3x-2y+z=-3\end{cases}$

Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

Solución: $A=-2$. $\pi'\equiv 5x+8y+z=0$

17. País vasco Julio 2019. Ejercicio A2. Hallar la ecuación de **una** recta paralela al plano $\pi\equiv x+2y+3z=6$ y que contenga al punto P(1,0,0). ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

Solución: $r\equiv\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=0\end{cases}$

18. País vasco Julio 2019. Ejercicio B2. Se considera la recta r

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$$

Y el punto P(1,2,5) exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a P.

Solución: $2x-y=0$

19. País vasco Junio 2019. Ejercicio A2. Sean la recta

$r \equiv \begin{cases} 4x-3y+4z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $x-y+Az=0$.

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a ***r***?

b) Encontrar el plano perpendicular a la recta ***r*** que pasa por el punto (0,0,0).

Solución: a) A = 3 b) $5x+8y+z=0$

20. País vasco Junio 2019. Ejercicio B2. Se consideran los tres puntos A(0,0,1), B(1,1,1) y C(–1,–1,2). ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Solución: No están alineados. El plano es $x-y=0$

21. País vasco Julio 2018. Ejercicio A2 Sea π el plano de ecuación $x+y+z=1$, sea r la recta de ecuaciones paramétricas {x = 1, y = t, z = t} y sea P el punto (1, 1, 0).

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a r y que contenga a P.

b) Hallar el punto simétrico de P respecto al plano π.

Solución: a) $y+z=1$ *b)* $P'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

22. País vasco Julio 2018. Ejercicio B2 Determinar el punto simétrico de A(−3, 1,−7) respecto a la recta r de ecuaciones paramétricas $\{x=-1+t,\ y=3+2t,\ z=-1+2t\}$.

Solución: $A'(-3,-3,-3)$

23. País vasco Junio 2018. Ejercicio A2 Dados los puntos A(3, 3, 3), B(2, 3, 4), C(0, 0, 4) y $D(3,0,1)$.

a) ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.

b) Calcular a para que el punto *P(a, a, 8)* esté en la recta que pasa por los puntos A y C.

Solución: a) Si están en el mismo plano. $\pi \equiv 3x-2y+3z=12$ *b) a = –12*

24. País vasco Junio 2018. Ejercicio B2 Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-1}$

Solución: $3x+4y+10z-22=0$

25. País vasco Julio 2017. Ejercicio A2 Dada la recta que pasa por los puntos A(0, 2, 3) y B(–1, 1, 1) encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto M(1, 0, 1) sea la misma que la distancia de P al punto N(0, 4, 2).

Solución: $P\left(-\frac{2}{5},\frac{8}{5},\frac{11}{5}\right)$

26. País vasco Julio 2017. Ejercicio B2 a) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x-3y+z=0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 2x-y+3z-5=0,$$

y que pasa por el punto P(2, 6, 5).
b) Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida.

Solución: a) $\frac{x-2}{-8}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-5}{5}$ *b) Distancia =* $\sqrt{11}\,u$

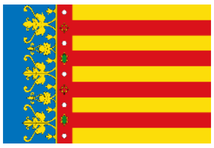
27. País vasco Junio 2017. Ejercicio A2 Dado el punto M(1, –3, 7), obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos A(1, –3, 4) y B(0, –4, 1).

Solución: $M'\left(\frac{29}{11},-\frac{15}{11},\frac{65}{11}\right)$

28. País vasco Junio 2017. Ejercicio B2 Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta $r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{3}$ y que pasa por el punto A(14, 3, 3).

Solución: $s\equiv\frac{x-14}{-10}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-3}{4}$

Valencia



1. Valencia Extraordinaria 2023. Problema 3. Dados los puntos A=(2,−1,0),B=(1,2,3) y C=(−1,0,0):
a) Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B. (3 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C. (4 puntos)
c) Calcular la distancia del punto A al plano π. (3 puntos)

Solución: a) $r:\begin{cases}3x+y-5=0\\ y-z+1=0\end{cases}$ *b)* $\pi:-x+3y+3z-1=0$ *c)* $d(A,\pi)=\dfrac{6}{\sqrt{19}}\simeq 1.3765$ unidades

2. Valencia Extraordinaria 2023. Problema 4. Dada la recta $r:(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,-1,2)$ y el plano $\pi:5x+my+z=2$:
a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m. (6 puntos)
b) Para m = 1, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π. (4 puntos)

Solución: a) Si $m\neq -3$ *recta y plano coinciden en un punto. Si* $m=-3$ *la recta está contenida en el plano.* *b)* $\pi´:3x-11y-4z+8=0$

3. Valencia Ordinaria 2023. Problema 3. Dada la recta $r:\begin{cases}x-y=1\\ x+2y+z=0\end{cases}$ y los puntos P = (0,0,3) y Q = (2,2,α), obtener:
a) Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q. (6 puntos)
b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P. (4 puntos)

Solución: a) $\alpha=-3$ *b)* $\pi:x+y-3z+9=0$

4. Valencia Ordinaria 2023. Problema 4. Dada la recta $r:\begin{cases}5x+y+7z=16\\ 9x-y+7z=12\end{cases}$ y el punto P = (0,5,2) se pide:
a) Comprobar que el punto Q = (2,6,0) pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. (2 puntos)
b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)
c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

Solución: a) $s:\begin{cases}x=2+2\lambda\\ y=6+\lambda\\ z=-2\lambda\end{cases},\lambda\in\mathbb{R}$ *b) El ángulo formado por las rectas r y s es de aproximadamente 35º. c) La proyección ortogonal del punto* P *en la recta* r *es el punto P´(1,4,1).*

5. Valencia Extraordinaria 2022. Problema 3. Dados los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(0,1,0)$, y la recta $s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z$:

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B. (2 puntos)
b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. (4 puntos)
c) Calcular la distancia del punto A a la recta s. (4 puntos)

Solución: a) $r:\begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$ *b)* $\pi: x+2y-8z-3=0$ *c)* $\frac{3\sqrt{42}}{14}\simeq 1.389$

6. Valencia Extraordinaria 2022. Problema 4. Dados los puntos $A=(2,1,-2)$ y $B=(3,2,3)$, y el plano π definido por $2x+2y+z=3$, obtener:
a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B. (5 puntos)
b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C. (5 puntos)

Solución: a) $C\left(\frac{7}{9},\frac{-2}{9},\frac{17}{9}\right)$ *b)* $\text{Área } ABC=5\sqrt{2}\simeq 7.07\,u^2$

7. Valencia Ordinaria 2022. Problema 3. Dadas las rectas $r:\begin{cases} x=z-1 \\ y=2-3z \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=4-5z \\ y=4z-3 \end{cases}$.
a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s. (5 puntos)
b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s. (5 puntos)

Solución: a) Las rectas r y s se cruzan (no son coplanarias). b) $l:\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ -3x-4y+z=0 \end{cases}$

8. Valencia Ordinaria 2022. Problema 4. Dados los planos $\pi_1: 2x-y-z+4=0$ y $\pi_2:\begin{cases} x=-1+\alpha \\ y=1+\alpha+\beta \\ z=\alpha-\beta \end{cases}$,

y la recta $r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}$.
a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2. (3 puntos)
b) Calcular el punto P’ que es simétrico al punto $P=(1,0,0)$ respecto del plano π_1. (4 puntos)
c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r. (3 puntos)

Solución: a) Los planos son paralelos. b) $P'(-3,2,2)$ *c)* $Q(-3,-8,6)$

9. Valencia Extraordinaria 2021. Problema 2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$,

$s:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x+my+z=2$ y $\pi_3: x+ay+z=1$ que depende del parámetro real m.
Obtened:
a) La posición relativa de las rectas r y s. (4 puntos)
b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π. (3 puntos)
c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m=2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$. (3 puntos)

Solución: a) Las rectas r y s son paralelas b) m = 3 c) $\text{Volumen } ABCP=2\,u^3$

10. Valencia Extraordinaria 2021. Problema 5. Dados los puntos $P(1,1,0)$, $Q(2,-1,1)$ y $R(\alpha,3,-1)$ se pide:
a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)
b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s. (4 puntos)
c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

Solución: a) $\pi: y+2z-1=0$. $d(O,\pi)=\frac{\sqrt{5}}{5}u$ *b)* $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$ *La distancia entre las rectas paralelas r y s es* $\sqrt{\frac{5}{6}}\,u$ *c)* $\alpha = 0$. $s:\begin{cases} x=1+\beta \\ y=1-2\beta \\ z=\beta \end{cases}$

11. Valencia Ordinaria 2021. Problema 2. Se dan los planos $\pi_1: x+y+z=a-1$, $\pi_2: 2x+y+az=a$ y $\pi_3: x+ay+z=1$.
a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a. (4 puntos)
b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3. (3 puntos)
c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2. (3 puntos)

Solución: a) Para $a \neq 1$ *y* $a \neq 2$ *los tres planos se cortan en un punto. Para* $a=1$ *los planos* π_1 *y* π_3 *son paralelos y son secantes con el plano* π_2 *y para* $a=2$ *los planos son secantes y se cortan en una recta común a los tres.*
b) No tienen recta común *c)* $r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \end{cases}$

12. Valencia Ordinaria 2021. Problema 5. Dados el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$, se pide:
a) Calculad la distancia del punto P al plano π. (2 puntos)
b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π. (5 puntos)
c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π. (3 puntos)

Solución: a) $d(P,\pi)=\sqrt{14}$ *unidades b)* $P'=(-5,-2,1)$ *c)* $\pi' \equiv 3x+2y+z+18=0$

13. Valencia Extraordinaria 2020. Problema 2. Se dan los planos $\pi: x+y=1$ y $\pi': x-y+z=1$ y el punto $P(1,-1,0)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π'. (3 *puntos*)
b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π'. (3 *puntos*)
c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π'. (4 *puntos*)

Solución: a) $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}$ *b)* $d(r,\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}\,u$; $d(r,\pi')=\frac{\sqrt{3}}{3}\,u$ *c)* $t:\begin{cases} x-y-2z-2=0 \\ 2x+z-2=0 \end{cases}$

14. Valencia Extraordinaria 2020. Problema 5. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2\lambda \end{cases}$,

$s:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$ y el plano $\pi:3x+ay-z+1=0$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π. (4 *puntos*)

b) La distancia entre las rectas r y s. (3 *puntos*)

c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta $t:\begin{cases} 2x-y=0 \\ y-z=2 \end{cases}$. (3 *puntos*)

Solución: a) No existe ningún valor de a. b) $d(r,s)=\frac{10}{\sqrt{29}}\,u$ *c)* $\cos(r,t)=\frac{2\sqrt{5}}{5}=0.8944$

15. Valencia Ordinaria 2020. Problema 2. Sea la recta $r:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ y los puntos $P=(1,0,0)$ y $Q=(2,1,\alpha)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r. (3 *puntos*)

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha=1$. (3 *puntos*)

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha=1$. (4 *puntos*)

Solución: a) $\alpha=-1$ *b)* $\pi\equiv x-y-1=0$ *c)* $\text{Distancia}(Q,\pi')=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577\,u$

16. Valencia Ordinaria 2020. Problema 5. Se dan el plano $\pi:2x+y-z-5=0$ y los puntos $(1,2,-1)$, $(2,1,0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π. (4 *puntos*)

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A.
Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r. (1+2 *puntos*)

c) La distancia entre el punto B y la recta r. (3 *puntos*)

Solución: a) $\pi'\equiv y+z-1=0$ *b)* $r\equiv\left.\begin{matrix} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-1-\lambda \end{matrix}\right\}$. $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ -y-z+1=0 \end{cases}$ *c)* $d(B,r)=\sqrt{3}\,u$

17. Valencia Julio 2019. Problema A.2.

Se da el plano $\pi:2x+y+2z=8$ y el punto P = (10, 0,10).

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al plano π. (3 *puntos*)

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Solución: a) $\frac{32}{3}u$ *b)* $\text{Área triángulo } ABC = 24\,u^2$ *c)* $\frac{512}{6} = 85,33\,u^3$

18. Valencia Julio 2019. Problema B.2. Problema B.2.

Se dan en el espacio la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x+2y+3z=6$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales ∝ y β. (5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta *r* y el plano π cuando ∝ = 6 y β = 3. (3 *puntos*)

c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π. (2 *puntos*)

Solución: a) Si $\beta \neq 3$ *plano y recta se cortan en un punto. Siendo* $\beta = 3$, *si* $\alpha = 6$ *la recta está contenida en el plano. Si* $\alpha \neq 6$ *la recta es paralela al plano. b) La distancia es 0. c)* $\pi': x+2y+3z=0$

19. Valencia Junio 2019. Problema A.2.

Consideremos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ y $s: x = y+1 = \frac{z-2}{2}$

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene a las rectas ***r*** y ***s***. *(3 puntos)*

b) La recta que pasa por $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta ***r***. *(4 puntos)*

c) El valor que deben tener los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x-2y+az=b$. *(3 puntos)*

Solución: a) $\pi: 7x+y-4z+9=0$ *b)* $s: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ *c) a = 0,5 y b = 3*

20. Valencia Junio 2019. Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x+12y+20z=180$.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. *(4 puntos)*

b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. *(4 puntos)*

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C. *(2 puntos)*

Solución: a) $\pi': 9x+12y+20z-80=0$ *y* $\pi'': 9x+12y+20z-280=0$

b) A(20,0,0); B(0,15,0); C(0,0,9). 43,15º c) $450\,u^3$

21. Valencia Junio 2018. A.2. Dados los puntos *A* = (– 1,2,λ), *B* = (2,3,5) y *C* = (3,5,3), donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor del parámetro λ para que el segmento *AC* sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices *A*, *B* y *C*. *(3 puntos)*

b) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* cuando λ = 6. *(4 puntos)*

c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices *A*, *B* y *C* cuando λ = 6. *(4 puntos)*

Solución: a) λ *= 2,5. b)* $\text{Área} = \frac{5\sqrt{2}}{2}u^2$ *c)* $\pi: x+z-8=0$

22. Valencia Junio 2018. B.2. Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta $r: \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{2}$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta *s* que corta a la recta a *r*, pasa por el punto *A*, y es perpendicular a la recta *r*. *(4 puntos)*

b) La distancia del punto *A* a la recta *r*. *(3 puntos)*

c) La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por $(3,-1,0)$ y es perpendicular a *r*. *(2 puntos)*

Solución: a) $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ *b)* $d(A,r)=\sqrt{21}\ u$ *c)* $d(B,\pi)=\dfrac{5\sqrt{14}}{7}\ u$

23. Valencia Julio 2018. A.2. Se tienen el plano $\pi: x-y+z-3=0$, la recta $s:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y el punto $A=(1,1,1)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta que pasa por *A*, corta a la recta *s* y es paralela al plano π. *(4 puntos)*

b) El plano que pasa por *A*, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta *s*. *(3 puntos)*

c) Discute si el punto (3, 2, 1) está en la recta paralela a *s* que pasa por (5, 3, 1). *(3 puntos)*

Solución: a) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$ *b)* $\pi': x-2y-3z+4=0$ *c) (3, 2,1) está en la recta paralela a s*

24. Valencia Julio 2018. B.2. Dada la recta $r:\begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases}$ se pide obtener **razonadamente escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta *r*. *(3 puntos)*

b) La ecuación del plano π que es paralelo a *r* y pasa por los puntos (5,0,1) y (4,1,0). *(4 puntos)*

c) La distancia entre la recta *r* y el plano π obtenido en el apartado anterior. *(2 puntos)*

Solución: a) $\begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=4-3t \end{cases}$ *b)* $x+y-5=0$ *c)* $d(r,\pi)=\sqrt{2}\ u$

25. Valencia Julio 2017. A.2. Se dan la recta $r:\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y+mz=n$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de *m* y *n* para los que la recta *r* y el plano *π* se cortan en un punto. *(3 puntos)*

b) Los valores de *m* y *n* para los que la recta *r* y el plano *π* no se cortan. *(3´5 puntos)*

c) Los valores de *m* y *n* para los que la recta *r* está contenida en el plano *π*. *(3´5 puntos)*

Solución: a) $m\neq -3$ *y n cualquier valor* *b)* $m=-3$ *y* $n\neq 2$ *c)* $m=-3$ *y* $n=2$

26. Valencia Julio 2017. B.2. Sea la recta $r:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x-y+bz=0$, siendo *a y b* dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto de intersección de la recta *r* y el plano *π* cuando $a=-b=1$. *(2´5 puntos)*

b) La distancia entre la recta *r* y el plano *π* cuando $a=b=4$. *(2´5 puntos)*

c) La posición relativa de la recta *r* y del plano *π* en función de los valores de los parámetros *a* y *b*. *(5 puntos)*

Solución: a) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right)$ *b)* $d(r,\pi)=\frac{2\sqrt{21}}{7}u$ *c) Si a = 10 y b = – 2 la recta r está contenida en el plano π. Si b ≠ – 2 y a + b = 8 la recta r es paralela al plano π. Si a + b ≠ 8 la recta r y el plano π se cortan.*

27. Valencia Junio 2017. A.2. Se dan el punto P = (1, 1, 1), la recta $r:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+y+z=1$

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado,** las ecuaciones de:

a) El plano que contiene al punto P y a la recta a *r*. *(2 puntos)*

b) La recta *s* que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π, la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta *s* con el plano π. *(2+2+2 puntos)*

c) El plano σ que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano *π*. *(2 puntos)*

Solución: a) $\pi: x+3y-z-3=0$ *b)* $s: x=y=z$. $d(P,\pi)=\frac{2\sqrt{3}}{3}u$. *Punto de intersección es* $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

c) $\sigma: -x+z-3=0$

28. Valencia Junio 2017. B. 2. Sea T un tetraedro de vértices O = (0,0,0), *A* = (1,1,1), *B* = (3,0,0) y *C* = (0,3,0).

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano *π* que contiene a los puntos *A, B y C,* *(1 punto)*
y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O. *(2 puntos)*

b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π. *(3 puntos)*

c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos *A*, *B y C,* *(2 puntos)*
y el volumen del tetraedro *T*. *(2 puntos)*

Solución: a) $\pi: x+y+z-3=0$. $x=y=z$ *b) (1, 1, 1)*

c) área de la cara = $\frac{3\sqrt{3}}{2}u^2$. *Volumen del tetraedro =* $\frac{3}{2}u^3$