11 Funciones. Límites y continuidad

1. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ indicando el tipo de discontinuidad que presenta en ellos. Indica el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos.

2. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$ indicando el tipo de discontinuidad que presenta en ellos. Indica el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos.

3. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x - 6}{2 - \sqrt{x - 2}}$ indicando el tipo de discontinuidad que presenta en ellos. Indica el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos.

4. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leqslant 1 \\ x^2 - 3x + 1 & x > 1 \end{cases}$

5. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 6 - x & x < -2 \\ 6 & -2 \leqslant x < 3 \\ x^2 - 3 & x \geqslant 3 \end{cases}$

6. Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x < 1 \\ ax - 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

7. Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & x < 2 \\ \mathrm{L}(x - 1) & x \geqslant 2 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

8. Halla los valores de los parámetros a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x < 0 \\ x^2 + ax + b & 0 \leqslant x < 3 \\ x + 9 & x \geqslant 3 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

9. Comprueba si la función $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ verifica las condiciones del teorema de Weierstrass en el intervalo [1, 4]. ¿Se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo? ¿Se puede asegurar que la función está acotada en todo su dominio?

10. Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$ está acotada en el intervalo $[-2, 2]$.

SOLUCIONES

1. El dominio de $f(x)$ es $\mathbf{R} - \{3\}$.

En $x = 3$ tiene una discontinuidad evitable, ya que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1)\cdot(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+1) = 4$$

siendo el verdadero valor en $x = 3$: $f(3) = 4$

2. El dominio de $f(x)$ es $\mathbf{R} - \{-1, 2\}$.

En $x = 2$ tiene una discontinuidad evitable, ya que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

El verdadero valor es $f(2) = \dfrac{5}{3}$.

En $x = -1$, $f(x)$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

3. El dominio de la función es $[2, \infty) - \{6\}$. En $x = 6$ tiene una discontinuidad evitable:

$$\lim_{x \to 6} f(x) = \lim_{x \to 6} \frac{(x-6)\cdot(2+\sqrt{x-2})}{(2-\sqrt{x-2})\cdot(2+\sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{(x-6)\cdot(2+\sqrt{x-2})}{6-x} = -4$$

siendo el verdadero valor en $x = 6$: $f(6) = -4$

4. Se estudia la continuidad en $x = 1$

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 2) = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 3x + 1) = -1$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$, la función es continua en toda la recta real.

5. La función es continua salvo, quizá, en $x = -2$ y en $x = 3$. Se estudia la continuidad en esos puntos:

- En $x = -2$:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (6 - x) = 8 \\ f(-2) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} 6 = 6 \end{cases}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 2.

- En $x = 3$, la función es continua:

$$f(3) = \lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 6 = 6 \\ f(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 3) = 9 - 3 = 6 \end{cases}$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbf{R} - \{-2\}$

6. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 1$:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^3 - 1) = 0 \\ &f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (ax - 1) = a - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 1$$

7. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 2$:

$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 + 2a + a - 1 = 3 + 3a \\ f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \mathrm{L}1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3 + 3a = 0 \Rightarrow a = -1$

8. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 0$ y en $x = 3$:

- $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + ax + b) = b \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow b = 0$

- $f(3) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 + ax + b) = 9 + 3a + b \\ f(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x + 9) = 3 + 9 = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9 + 3a = 12 \Rightarrow a = 1$

9. $f(x)$ es continua en todo su dominio $\mathbf{R} - \{0\}$; por tanto, es continua en $[1, 4]$.

Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que está acotada en el intervalo; sin embargo, no está acotada en el dominio, ya que:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

10. Se estudia la continuidad de la función en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} x = \lim_{x \to 0^+} (2x - 1) = -1$$

Como $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$. La función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en $[-2, 2]$. Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que está acotada en ese intervalo.

11 Funciones. Límites y continuidad

1. Calcula el verdadero valor de la función $f(x) = \dfrac{\text{sen}^3 x}{\text{tg } x - \text{sen } x}$ en $x = 0$.

2. Calcula el verdadero valor de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+9} - 3}$ en $x = 0$.

3. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = \dfrac{|x^3 - x|}{x}$ en $x = 0$?

4. Clasifica las discontinuidades de la función $f(x) = (x + 1) \cdot 2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)}$

5. Determina para qué valores de los parámetros a y b es continua en toda la recta real la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \leqslant 0 \\ \sqrt{ax + b} & 0 < x \leqslant 2 \\ -\dfrac{x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} & x > 2 \end{cases}$$

6. Demuestra que la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-1, 3]$. ¿Puede afirmarse lo mismo de la función $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$?

7. Demuestra que la ecuación $2^x - 4x = 0$ tiene, al menos, dos soluciones reales.

8. Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos \pi x$ se cortan en un punto cuya abscisa pertenece al intervalo $[0, 2]$.

9. Calcula el valor de k para que la función $f(x) = \dfrac{x^2 + kx + 5}{x^2 - 3x + 2}$ tenga en $x = 2$ una discontinuidad evitable y escribe, en ese caso, el verdadero valor de la función en $x = 2$.

10. Construye una función adecuada para demostrar, por el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ toma todos los valores del intervalo $[0, 3]$.

SOLUCIONES

1. El verdadero valor es $f(0) = 2$, ya que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^3 x}{\text{tg } x - \text{sen } x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x \cdot \text{sen}^2 x}{\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} - \text{sen } x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} [\cos x \cdot (1 + \cos x)] = 2$$

2. El verdadero valor es $f(0) = 3$, ya que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+9} - 3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)\cdot(\sqrt{x+1} + 1)\cdot(\sqrt{x+9} + 3)}{(\sqrt{x+9} - 3)\cdot(\sqrt{x+9} + 3)\cdot(\sqrt{x+1} + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(\sqrt{x+9} + 3)}{x\cdot(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+9} + 3)}{(\sqrt{x+1} + 1)} = 3$$

3. $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(x^3 - x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (1 - x^2) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 - x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

La función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 2.

4. La función es continua en el dominio $\mathbf{R} - \{0\}$; estudiamos el tipo de discontinuidad en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) & \text{si } x < 0 \\ (x+1)\cdot 2^{-\frac{2}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \text{ y}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{2^{\frac{2}{x}}} = 0$, por lo que la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 1 en $x = 0$.

5. Para que la función sea continua en toda la recta real debe ser continua en $x = 0$ y en $x = 2$:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow b = 4$$

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\begin{cases} f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \sqrt{2a+4} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a+4} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -1$$

6. La función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[-1, 3]$, $f(-1) = -6 < 0$ y $f(3) = 14 > 0$; por el teorema de Bolzano, $\exists c \in [-1, 3]$ que cumple $f(c) = 0$.

Este razonamiento no es válido para la función $g(x)$, ya que no es continua en el intervalo $[-1, 3]$ puesto que no está definida en $x = 2$; sin embargo, se puede observar directamente que la función corta al eje de abcisas en $x = -\dfrac{1}{2} \in [-1, 3]$.

7. Se considera la función $f(x) = 2^x - 4x$; esta función es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[0, 1]$:

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = -2$$

por el teorema de Bolzano, $\exists c \in [0, 1]$ tal que $2^c - 4c = 0$, es decir, $c \in [0, 1]$ es una solución de la ecuación.

Además, $f(4) = 2^4 - 4\cdot 4 = 0$, por lo que $x = 4$ es otra solución de la ecuación.

8. Sea la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos \pi x$ esta función es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[0, 2]$:

$$h(0) < 0 \qquad h(2) > 0$$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in [0, 2]$ que cumple $h(c) = 0$; es decir, $f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$.

9. Para que exista una discontinuidad evitable:

$\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + kx + 5}{x^2 - 3x + 2} \in \mathbf{R}$, y para ello debe anularse el numerador en $x = 2 \Rightarrow 2^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = -\dfrac{9}{2}$. Para este valor:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - \frac{9}{2}x + 5}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot\left(x - \frac{5}{2}\right)}{(x-2)\cdot(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x - \frac{5}{2}}{x - 1} = -\frac{1}{2}$$

que es el verdadero valor de $f(x)$ en $x = 2$.

10. La función $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - c$, $0 < c < 3$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$ y toma valores de distinto signo en los extremos:

$$g(-1) = -c < 0 \qquad g(2) = 3 - c > 0$$

Por el teorema de Bolzano, $\exists x_0 \in [-1, 2]$ que cumple $g(x_0) = 0$; es decir, $f(x_0) - c = 0 \Rightarrow f(x_0) = c$.