EJERCICIOS

Figuras semejantes. Teorema de Tales

11.26. (TIC) Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos. Estudia, en cada caso, si son o no semejantes. En caso afirmativo, determina la correspondiente razón de semejanza.

a) 2 4 5 — 8 16 20

b) 3 4 6 — 4,5 6 8,5

c) 2,5 5,5 7 — 6,25 13,75 17,5

a) Los lados son proporcionales, ya que $\frac{8}{2}=\frac{16}{4}=\frac{20}{5}=4$.

Por el tercer criterio, los triángulos son semejantes con razón de semejanza de k = 4 del segundo respecto del primero.

b) Los lados no son proporcionales, ya que $\frac{4,5}{3}=\frac{6}{4}\neq\frac{8,5}{6}$.

Los triángulos no son semejantes.

c) Los lados son proporcionales, ya que $\frac{6,25}{2,5}=\frac{13,75}{5,5}=\frac{17,5}{7}=2,5$.

Por el tercer criterio, los triángulos son semejantes con razón de semejanza de k = 2,5 del segundo respecto del primero

11.27. a) ¿Son semejantes todos los pentágonos regulares?

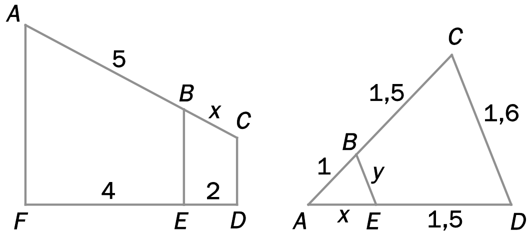
b) Un pentágono regular tiene por lado 4 cm. Calcula el perímetro de otro pentágono regular con razón de semejanza respecto al anterior de 2,5.

a) Todos los pentágonos regulares son semejantes ya que sus ángulos son siempre de $\frac{180^\circ\cdot 3}{5}=108^\circ$ y sus lados son proporcionales, ya que son iguales en cada uno de ellos.

b) Los lados del nuevo pentágono miden 4 · 2,5 = 10 cm.

El perímetro del nuevo pentágono mide 5 · 10 = 50 cm.

11.28. (TIC) Calcula el valor de los segmentos desconocidos en cada una de las siguientes representaciones.



Primera figura: $\frac{5}{4}=\frac{x}{2}\Rightarrow 4x=10\Rightarrow x=2,5$

Segunda figura: $\frac{1}{x}=\frac{1,5}{1,5}\Rightarrow 1,5x=1,5\Rightarrow x=1$ $\qquad \frac{1,6}{1+1,5}=\frac{y}{1}\Rightarrow 2,5y=1,6\Rightarrow y=0,64$

11.29. Decide, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Todos los cuadrados son semejantes.

b) Todos los rectángulos son semejantes.

c) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

d) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

e) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

f) Todos los triángulos que son a la vez rectángulos e isósceles son semejantes.

a) Verdadera. Todos los ángulos son rectos y los lados correspondientes son proporcionales, ya que en cada cuadrado los lados son iguales.

b) Falsa. Aunque todos los ángulos son iguales, los lados no tienen por qué ser proporcionales. Por ejemplo, los rectángulos de lados 1 y 2 cm y 1 y 3 cm.

c) Verdadera. Todos los ángulos son de 60° y, por tanto, iguales, y los lados correspondientes son proporcionales, ya que en cada triángulo los lados son iguales.

d) Falsa. Ni siquiera tienen por qué tener los ángulos iguales.

e) Falsa. Ni siquiera tienen por qué tener los ángulos iguales.

f) Verdadera. Los ángulos correspondientes son iguales, ya que en todos los casos miden 90°, 45° y 45°, y los lados correspondientes son proporcionales, pues son de la forma x, x y $x\sqrt{2}$.

11.30. (TIC) Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos semejantes. Calcula, en cada caso, la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos.

a) 3, 4, 6 4,5, *x*, *y*

b) *x*, 4, 3 2, 2, *y*

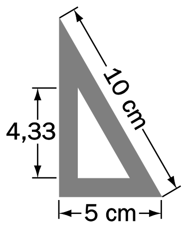
c) *x*, *y*, 8 12, 20, 25

a) La razón de semejanza es $\frac{4,5}{3} = 1,5$. Por tanto: $\frac{x}{4} = 1,5 \Rightarrow x = 6$ $\frac{y}{6} = 1,5 \Rightarrow y = 9$

b) La razón de semejanza es $\frac{2}{4} = 0,5$. Por tanto: $\frac{2}{x} = 0,5 \Rightarrow x = 4$ $\frac{y}{3} = 0,5 \Rightarrow y = 1,5$

c) La razón de semejanza es $\frac{25}{8} = 3,125$. Por tanto: $\frac{12}{x} = 3,125 \Rightarrow x = 3,84$ $\frac{20}{y} = 3,125 \Rightarrow y = 6,4$

11.31. (TIC) Comprueba que los dos triángulos que forman el cartabón de la figura son proporcionales. Calcula la medida de los lados e indica la razón de semejanza.



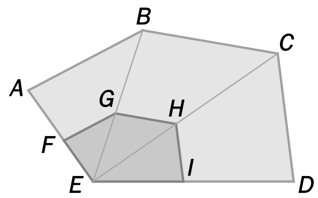
Los triángulos exterior e interior son semejantes, ya que tienen los ángulos iguales (los lados son paralelos).

El triángulo exterior tiene por lados: 10, 5 y $\sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8,66$ cm.

La razón de semejanza es, por tanto, $k = \frac{4,33}{8,66} = 0,5$.

Los lados del triángulo interior serán: 4,33, $10 \cdot 0,5 = 5$ y $5 \cdot 0,5 = 2,5$ cm.

11.32. (TIC) Del polígono *ABCDE* de la figura se conocen las medidas: *AB* = 27, *BC* = 30, *CD* = 30, *DE* = 45 y *EA* = 25. Si el polígono *EFGHI* es semejante al anterior e *IE* = 20:



a) Calcula la razón de semejanza de los dos polígonos.

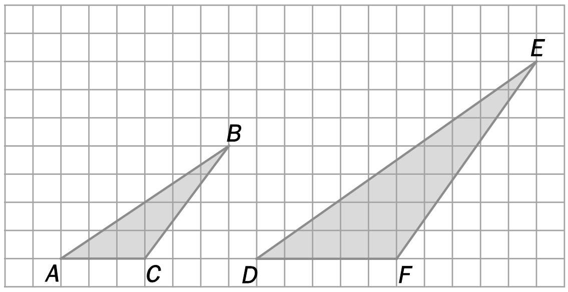
b) Halla los lados desconocidos de *EFGHI*.

a) La razón de semejanza del mayor respecto del menor es $k = \frac{DE}{IE} = \frac{45}{20} = 2{,}25$.

b) $EF = \frac{EA}{2{,}25} = \frac{25}{2{,}25} = 11{,}11$ $\quad FG = \frac{AB}{2{,}25} = \frac{27}{2{,}25} = 12$

$GH = \frac{BC}{2{,}25} = \frac{30}{2{,}25} = 13{,}33$ $\quad HI = \frac{CD}{2{,}25} = \frac{30}{2{,}25} = 13{,}33$

11.33. Con la ayuda del teorema de Pitágoras, calcula los lados de los triángulos *ABC* y *DEF* y comprueba si son semejantes.



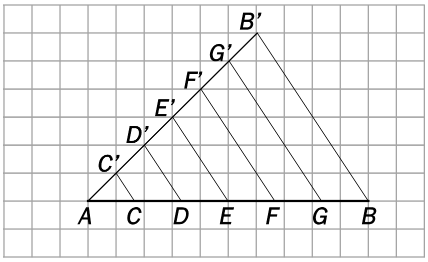
$AC = 3$ $\quad BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ $\quad AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

$DF = 5$ $\quad EF = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ $\quad ED = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149}$

Los lados no son proporcionales, ya que $\frac{3}{5} = 0{,}6$, $\frac{5}{\sqrt{74}} \approx 0{,}58$ y $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{149}} \approx 0{,}59$; por tanto, los dos triángulos no son semejantes.

División de segmentos. Criterios de semejanza

11.34. Divide un segmento de longitud 10 centímetros en seis partes iguales.



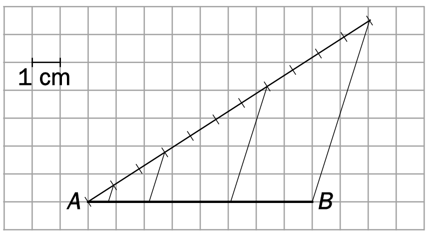
Sean *A* y *B* los extremos del segmento que se desea dividir.

Desde el extremo *A* se traza una semirrecta auxiliar sobre la que se llevan seis segmentos de la misma longitud (la que se quiera) y que tienen por extremos *C'*, *D'*, *E'*, *F'*, *G'* y *B'*.

Se une *B'* con *B* y se trazan paralelas a la recta *BB'* por *C'*, *D'*, *E'*, *F'* y *G'* que cortan a *AB* en *C*, *D*, *E*, *F* y *G*.

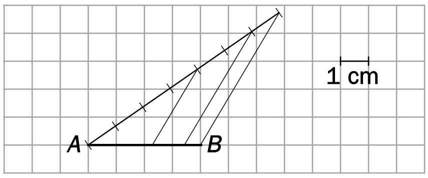
Gracias al teorema de Tales, se puede asegurar que los segmentos *AC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG* y *GB* son iguales.

11.35. Divide un segmento de 8 cm de longitud en cuatro partes proporcionales a 1, 2, 4 y 4.



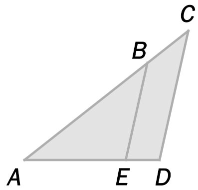
11.36. Divide un segmento de 4 cm en tres partes de forma que la primera sea doble de la segunda, y esta, doble de la tercera.

Se trata de dividir un segmento *AB* de 4 cm en partes proporcionales a 1, 2 y 4.



11.37. En la figura adjunta, los lados *CD* y *BE* son paralelos.

Se sabe que: *AB* = 3 *AE* = 2 *BC* = 1 *BE* = 2



a) ¿Cómo son los triángulos *ABE* y *ACD*?

b) Calcula las medidas de los segmentos *AD, ED* y *CD*.

c) ¿Cuánto vale la razón de semejanza?

a) Los triángulos *ABE* y *ACE* son semejantes, ya que están en posición de Tales.

b) $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{3+1}{AD} = \frac{3}{2} \Rightarrow AD = \frac{8}{3}$

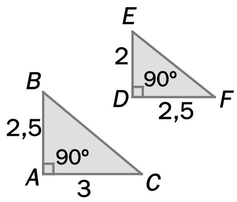
$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{ED} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{ED} \Rightarrow ED = \frac{2}{3}$

$\frac{BE}{AE} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{CD}{8/3} \Rightarrow CD = \frac{8}{3}$

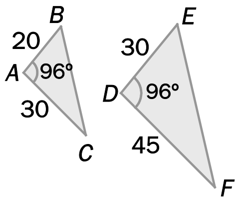
c) La razón de semejanza vale $\frac{4}{3}$.

11.38. Estudia si los siguientes pares de triángulos son o no semejantes.

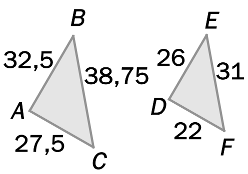
a)



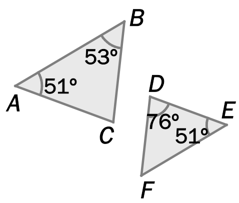
c)



b)



d)



a) Tienen un ángulo igual (el de 90º), pero los lados que lo forman no son proporcionales, ya que $\frac{2,5}{3} \neq \frac{2}{2,5}$. Por tanto, no son semejantes.

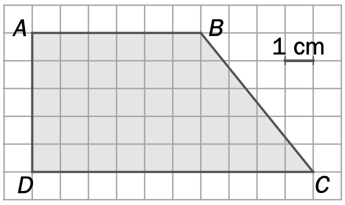
b) Los lados son proporcionales, ya que $\frac{32,5}{26} = \frac{27,5}{22} = \frac{38,75}{31}$ = 1,25. Por tanto, y de acuerdo con el tercer criterio, los triángulos son semejantes.

c) Tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales, ya que $\frac{20}{30} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. Por tanto, y de acuerdo con el segundo criterio, los triángulos son semejantes.

d) Los ángulos del primer triángulo son 53º, 51º, y 180º – 53º – 51º = 76º. Por tanto, los dos triángulos tienen dos ángulos iguales y, en aplicación del primer criterio, son semejantes.

Razón de longitudes, áreas y volúmenes

11.39. Dado el cuadrilátero de la figura:



a) Halla la medida de sus cuatro lados.

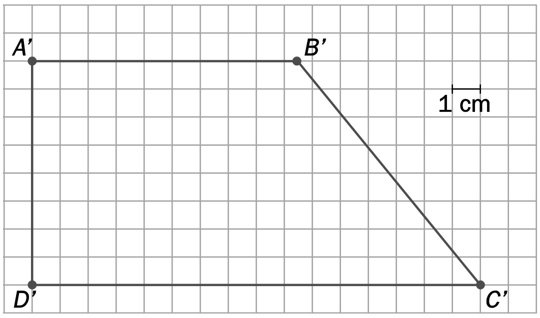
b) Halla su perímetro.

c) Dibuja un cuadrilátero de 44 centímetros de perímetro y semejante al anterior.

a) $AB = 6$ cm $BC = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ cm $CD = 10$ cm $DA = 5$ cm

b) $P = 21 + \sqrt{41} \approx 27{,}4$ cm

c) La razón de semejanza será la razón de los perímetros: $k = \dfrac{44}{21+\sqrt{41}} \approx 1{,}6$



Los lados del nuevo cuadrilátero medirán por tanto:

$A'B' \approx 1{,}6 \cdot 6 = 9{,}6$ cm

$B'C' \approx 1{,}6 \cdot 6{,}4 = 10{,}24$ cm

$C'D' \approx 1{,}6 \cdot 10 = 16$ cm

$D'A' \approx 1{,}6 \cdot 5 = 8$ cm

11.40. (TIC) Los lados de un pentágono miden 4, 5, 5, 5 y 6 centímetros, respectivamente. Calcula los lados de otro pentágono semejante al anterior y con perímetro de 37,5 centímetros.

La razón de semejanza coincide con la razón de perímetros $k = \dfrac{37{,}5}{4+5+5+5+6} = \dfrac{37{,}5}{25} = 1{,}5$.

Por tanto, los lados del nuevo pentágono son:

$4 \cdot 1{,}5 = 6$ cm; $5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$ cm; 7,5 cm; 7,5 cm, y $6 \cdot 1{,}5 = 9$ cm

11.41. (TIC) Los lados de un pentágono miden 4, 3, 3, 5 y 5 centímetros, respectivamente, y su área mide 25 centímetros cuadrados. Calcula los lados de otro pentágono semejante al anterior con área de 100 metros cuadrados.

La razón de las áreas es $\dfrac{100}{25} = 4$, con lo que la razón de semejanza es $k = \sqrt{4} = 2$.

Por tanto, los lados del nuevo pentágono son:

$4 \cdot 2 = 8$ cm; $3 \cdot 2 = 6$ cm; 6 cm; $5 \cdot 2 = 10$ cm, y 10 cm.

11.42. (TIC) Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su área mida 135 centímetros cuadrados.

El rectángulo original tiene de área $3 \cdot 5 = 15$ cm^2, con lo que la razón de áreas es $\dfrac{135}{15} = 9$ y la razón de semejanza es $k = \sqrt{9} = 3$.

Por tanto las medidas del nuevo rectángulo son $3 \cdot 3 = 9$ cm y $5 \cdot 3 = 15$ cm.

11.43. Un triángulo rectángulo tiene por catetos 3 y 4 centímetros. Halla la hipotenusa de otro triángulo semejante al anterior sabiendo que el área de este segundo triángulo es de 24 centímetros cuadrados.

La hipotenusa del triángulo original mide $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm.

El triangulo original tiene de área $\dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm^2, con lo que la razón de áreas es $\dfrac{24}{6} = 4$ y la razón de semejanza es $k = \sqrt{4} = 2$.

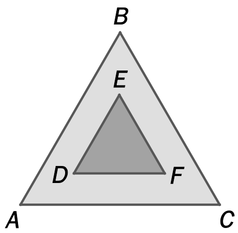
Por tanto, la hipotenusa del nuevo triángulo mide $5 \cdot 2 = 10$ cm.

11.44. (TIC) Las áreas de dos cuadriláteros semejantes son 18 y 28,125 metros cuadrados, respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del menor si el del mayor es de 22,5 metros?

La razón de áreas es $\frac{28{,}125}{18} = 1{,}5625$, con lo que la razón de semejanza es $k = \sqrt{1{,}5625} = 1{,}25$.

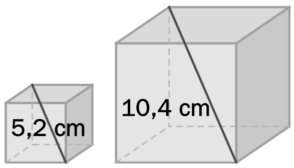
Como la razón de perímetros coincide con k, el perímetro del cuadrilátero menor es $\frac{22{,}5}{1{,}25} = 18$ cm.

11.45. (TIC) Los triángulos *ABC* y *DEF* son equiláteros. Calcula la razón de semejanza sabiendo que el área del mayor es de 6,93 centímetros cuadrados y el lado del menor mide 2 centímetros.



El área del triángulo menor es $\frac{2 \cdot \sqrt{2^2 - 1^2}}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ cm^2, con lo que la razón de áreas es $\frac{6{,}93}{1{,}73} \approx 4$ y por tanto la razón de semejanza es $k = \sqrt{4} = 2$.

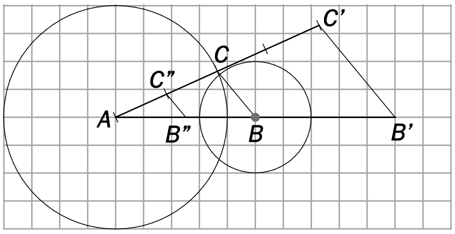
11.46. (TIC) Las diagonales de dos cubos miden 5,2 y 10,4 centímetros, respectivamente. Si el volumen del primero es de 27 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen del segundo?



Los dos cubos son semejantes con razón de semejanza $k = \frac{10{,}4}{5{,}2} = 2$, con lo que la razón de los volúmenes es $k^3 = 8$ y, por tanto, el volumen del segundo cubo es $27 \cdot 8 = 216$ cm^3.

Construcción de polígonos semejantes

11.47. Dibuja un triángulo de lados 2, 4 y 5 centímetros. Construye otros triángulos semejantes al anterior con razones de semejanza 2 y $\frac{1}{2}$.

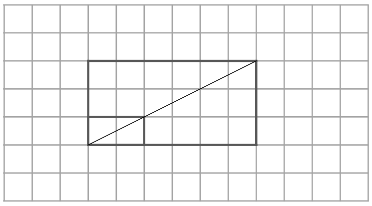


El triángulo *ABC* tiene por lados 5, 4 y 2

El triángulo *AB'C'* es semejante al *ABC* con razón de semejanza 2.

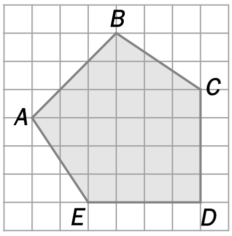
El triángulo *AB"C"* es semejante al *ABC* con razón de semejanza 0,5.

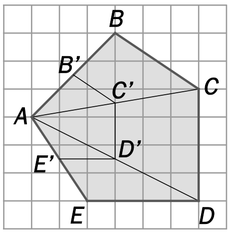
11.48. Construye un rectángulo de medidas 3 × 6 centímetros y, después, otro semejante al anterior con razón de semejanza $\frac{1}{3}$.



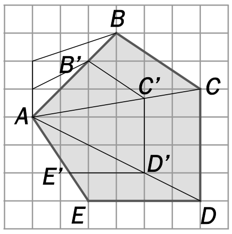
El segundo rectángulo medirá 1 × 2 centímetros.

11.49. Construye dos polígonos semejantes al de la figura con razones de semejanza $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.





$k = \frac{1}{2}$



$k = \frac{2}{3}$

Escalas

11.50. (TIC) En un mapa se indica que la escala es 1:25 000. ¿Cuál es la razón de semejanza entre la realidad y la realidad representada? Si la distancia entre dos ciudades en ese mapa es de 15,5 centímetros, ¿cuál será la distancia real que las separa? Da el resultado en kilómetros.

En el mapa, un centímetro representa 25 000 cm de la realidad.

La razón de semejanza es, por tanto, $k = \frac{25000}{1} = 25\,000$.

Los 15,5 cm del plano se corresponden con 15,5 · 25 000 = 387 500 cm = 3,875 km.

11.51. La altura de un edificio es de 30 metros. Se quiere construir una maqueta a escala 1:200. ¿Cuál será la altura de ese edificio en la maqueta?

La altura en la maqueta es de $\frac{30}{200} = 0{,}15$ m = 15 cm.

11.52. En una maqueta de un jardín botánico, la altura de una estatua es de 2,5 centímetros. Calcula la escala de la maqueta si la altura real de esa estatua es de 2 metros.

2 m = 200 cm $\Rightarrow \frac{200}{2{,}5} = 80 \Rightarrow$ La escala de la maqueta es 1: 80.

11.53. (TIC) La distancia entre dos ciudades representadas en un mapa de escala 1:50 000 es de 10 centímetros. Calcula la distancia que separa a dichas ciudades en otro mapa de escala 1:125 000.

En el mapa de 1:50 000, 10 cm son 10 · 50 000 = 500 000 cm = 5 km de la realidad.

En el mapa de 1:125 000, 5 km de la realidad son $\frac{500000}{125000} = 4$ cm en el mapa.

11.54. La distancia entre dos ciudades es de 350 kilómetros y la distancia que las separa en un mapa es de 7 centímetros. ¿Cuál es la escala de dicho mapa?

350 km = 35 000 000 cm $\Rightarrow \dfrac{35000000}{7} = 5\,000\,000 \Rightarrow$ La escala de la maqueta es 1:5 000 000.

11.55. (TIC) El cuarto de Javier es un rectángulo de dimensiones 3,15×3,78 metros. ¿Qué dimensiones tendrá el rectángulo que ha pintado en un plano con escala 1:21?

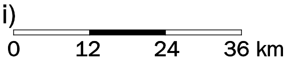
1 m en el plano son 21 m de la realidad, con lo que las dimensiones en el plano serán:

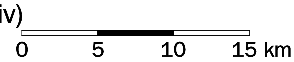
$\dfrac{3{,}15}{21} = 0{,}15$ m = 15 cm y $\dfrac{3{,}78}{21} = 0{,}18$ m = 18 cm

11.56. Relaciona cada una de las escalas dadas en forma gráfica con cada una de las escalas dadas mediante una proporción numérica.

i)


ii)


iii)


iv)


a) 1:500 000

b) 1:500

c) 1:1 200 000

d) 1:1200

En la escala gráfica I, 1 cm equivale a 12 m = 1 200 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica d.

En la escala gráfica II, 1 cm equivale a 5 m = 500 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica b.

En la escala gráfica III, 1 cm equivale a 12 km = 1 200 000 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica c.

En la escala gráfica IV, 1 cm equivale a 5 km = 500 000 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica a.

PROBLEMAS

11.57. La sombra de una casa de 21 metros de altura es de 28 metros. ¿Qué sombra proyectará en ese momento un árbol de 3 metros de alto?

En un mismo instante, los rayos del sol tienen la misma inclinación y, por tanto, los triángulos rectángulos cuyos catetos son las alturas y las sombras son semejantes.

Aplicando la semejanza de triángulos y siendo x la medida buscada:

$\dfrac{21}{28} = \dfrac{3}{x} \Rightarrow 21x = 84 \Rightarrow x = 4$ m

11.58. (TIC) Las dimensiones de un jardín rectangular en un plano de escala 1: 125 son 24 y 32 centímetros.

a) Calcula las dimensiones reales del jardín y expresa los resultados en metros.

b) Calcula el perímetro y el área del jardín.

a) 1 cm del plano se corresponde con 125 cm de la realidad.

Por tanto, las dimensiones reales son 24 · 125 = 3000 cm = 30 m y 32 · 125 = 4000 = 40 m.

b) El perímetro es $P = 2 \cdot (40 + 30) = 140$ m.

El área es $A = 40 \cdot 30 = 1200$ m^2.

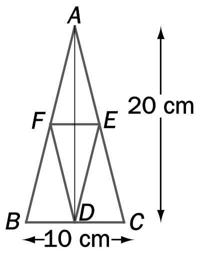
11.59. (TIC) La distancia entre Badajoz y Lisboa es de 230 kilómetros. Calcula la distancia que separa ambas ciudades en un mapa con escala 1:1 200 000.

1 cm del mapa se corresponde con $1200000 \text{ cm} = 12 \text{ km}$ de la realidad.

Por tanto, la distancia en el mapa que separa las dos ciudades será $\frac{230}{12}$ = 19,17 cm.

11.60. Un triángulo isósceles tiene por base 10 metros y por altura 20 metros. Calcula el perímetro de dicho triángulo y del que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados.

Observemos la siguiente figura:



Por el teorema de Pitágoras, $AC = \sqrt{20^2 + 5^2} = \sqrt{425} \approx 20{,}62$ m

El perímetro del triángulo *ABC* es, por tanto, $P = 10 + 2\sqrt{425} \approx 51{,}23$ m.

El triángulo *DEF* es igual que el triángulo *AFE*, que es semejante a *ABC* con razón de semejanza $\frac{1}{2}$.

Por tanto, el perímetro de *DEF* es la mitad del de *ABC*, es decir, $\frac{10 + 2\sqrt{425}}{2} = 5 + \sqrt{425} \approx 25{,}62$ m.

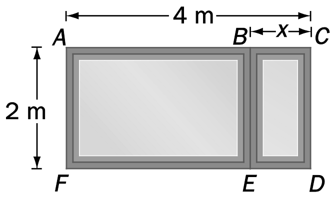
11.61. (TIC) Una empresa de vehículos fabrica dos camiones semejantes para transporte de carburantes. Las alturas respectivas son de 2 y 2,5 metros. El área necesaria para construir el depósito del camión menor es de 18 metros cuadrados y el volumen del depósito del camión mayor es de 48 metros cúbicos. Calcula el área necesaria para construir el depósito mayor y el volumen del depósito menor.

La razón de semejanza es $\frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$.

El área del depósito mayor es $18 \cdot 1{,}25^2 = 28{,}125 \text{ m}^2$.

El volumen del depósito menor es $\frac{48}{1{,}25^3} = 24{,}576 \text{ m}^3$.

11.62. Se quiere construir un ventanal formado por dos rectángulos *ABEF* y *BCDE* con la forma y dimensiones que muestra la figura.



a) Calcula el valor del lado *x* = *BC* para que los rectángulos *ACDF* y *BCDE* sean semejantes.

b) Halla las áreas de los rectángulos anteriores y comprueba la relación que existe entre su razón y la razón de semejanza.

c) Comprueba si el rectángulo *ABEF* es también semejante a los anteriores.

a) $\frac{AC}{CD} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 1$ m

b) Área del rectángulo *ACDF*: $S_1 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ m}^2$

Área del rectángulo *BCDE*: $S_2 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ m}^2$

La razón de semejanza entre los dos rectángulos es $k = \frac{4}{2} = 2$.

La razón de áreas es $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{2} = 4$, que coincide con k^2.

c) Los lados de *ABEF* miden 3 y 2 m, por lo que este rectángulo no es semejante a los anteriores ya que sus lados no son proporcionales a los de ellos.